

106年協助縣市辦理學生學習能力檢測

數學五年級施測結果報告



測驗及評量研究中心

中華民國 106 年 9 月

摘 要

本次學力檢測之調查母群體為 106 年臺灣地區 15 縣市之五年級學生，數學科有效作答 137,835 人，缺考率 1.81%。學力檢測工具為「學力檢測數學科測驗」，評量架構是以五年級九年一貫課程綱要能力指標為基礎，搭配概念理解、程序執行、解題思考三個認知向度組成，用來測量五年級學生的數學科學習表現，共 25 題選擇題。本報告內容包含數學評量架構說明、試題品質與教學建議，研究團隊分析每道試題欲評量的核心概念及學生錯誤選答的可能原因，期望從錯誤的可能原因中讓老師瞭解學生狀況，並附上教學建議以期給予教學現場的老師們實質上的幫助。本次學力檢測有一些題目高分組與低分組的學生在作答反應上卻有非常大的落差，或是全體學生均表現不佳的題目，教師教學上宜特別注意「長度、面積、體積與表面積」、「因數、倍數、公因數、公倍數的基本概念」、「數線上分數、小數的標記」、「大單位重量、面積、體積、容量的觀念」、「四則運算算則、分配律、交換律與結合律」等教學。

目錄

壹、 背景與目的.....	1
一、 背景.....	1
二、 目的.....	1
貳、 參與縣市與檢測規模.....	1
參、 五年級檢測對象與檢測工具.....	4
一、 對象.....	4
二、 試後數據.....	5
三、 不同都市化程度之區域數學學力表現.....	5
肆、 試題彙編.....	7
一、 評量架構.....	7
二、 試題參數名詞解釋.....	9
伍、 數學科試題解析與教學建議.....	10
陸、 其他教學建議.....	141
一、 學生整體表現.....	141
二、 整體教學建議.....	142
柒、 附錄-105 學年度學力檢測測驗題本.....	153

壹、背景與目的

一、背景

教育部為協助各縣市其學生學習能力檢測之測驗標準化，乃於民國 98 年委請國家教育研究院所屬之「臺灣學生學習成就評量資料庫」團隊，規劃協助縣市辦理學生學力檢測計畫（以下簡稱學力檢測），並自民國 99 年至 100 年期間進行國小四年級國語文與數學兩科目之施測。102 年至 104 年則改以國小五年級學生為檢測對象，檢測科目仍維持國語文與數學兩科目。105 年則將檢測對象向下延伸至國小二、三年級，施測科目也從國語文和數學兩科，增加五年級英語科。105 年同時小規模試辦國中七、八年級國語文閱讀、數學及英語閱讀和共同問卷施測。

106 年學力檢測的對象包含國小二年級、三年級、五年級和國中七年級、八年級，科目涵蓋國語文、英語文和數學，採取縣市政府與國教院合作之模式，完成試題研發、資料收集與資料分析之程序，根據施測結果完成此份成果報告，期能提供參與之縣市教學建議參考依據。

二、目的

1. 協助各縣市其學生學習能力檢測之測驗標準化，並鼓勵各縣市培育評量專長團隊，提昇縣市教師命題專業知能。
2. 縣市策略結盟縣市，降低各縣市試題研發量及命題壓力，減少預試人數及成本。
3. 依評量架構以聯合命題方式，建立參與縣市共同之標準化評量工具，提供具體且詳實之數據分析及試題內容解析與教學輔導建議資料。

貳、參與縣市與檢測規模

106 年 5 月 25 日進行參與縣市學力檢測，本次共計接獲 16 縣市委託辦理，各年級施測人數為：二年級 48,766 人、三年級 43,155 人、五年級 140,379 人、七年級 41,129 人、八年級 40,966 人，整理如【表 2-1】。數學科各年級施測人數為：三年級 42,258 人、五年級 137,835 人、七年級 40,267 人、八年級 39,957 人，整理如下【表 2-1】。

【表 2-1：參與縣市各年級施測人數表】

年級 縣市	二年級	三年級	五年級	七年級	八年級	總計
基隆市			2,825	3,115		5,940
新北市			33,057			33,057
桃園市	20,300	21,163	21,102	1,799	2,061	66,425
新竹市	4,448	4,583	4,301	4,239	4,499	22,070
新竹縣			5,750			5,750
苗栗縣	4,584	4,750	4,921	4,846	5,292	24,393
彰化縣	10,526		11,554	11,444	12,238	45,762
臺中市			24,865			24,865
南投縣	3,670	3,914	4,400	4,760	5,186	21,930
雲林縣	5,238	5,571	6,102	6,889	7,400	31,200
嘉義市			2,665			2,665
嘉義縣		3,174	3,711			6,885
臺南市			14,370			14,370
花蓮縣				3,207	3,355	6,562
澎湖縣			663	773	832	2,268
連江縣			93	57	103	253
總計	48,766	43,155	140,379	41,129	40,966	314,395

【表 2-2：縣市數學科各年級施測人數表】

年級 縣市	三年級	五年級	七年級	八年級	總計
花蓮縣			3,108	3,253	6,361
南投縣	3,832	4,303	4,672	5,034	17,841
苗栗縣	4,570	4,744	4,768	5,181	19,263
桃園市	20,753	20,718	1,756	2,000	45,227
基隆市		2,788	3,019		5,807
連江縣		93	53	102	248
雲林縣	5,467	6,007	6,737	7,251	25,462
新北市		32,256			32,256
新竹市	4,462	4,193	4,141	4,364	17,160
新竹縣		5,637			5,637
嘉義市		2,627			2,627
嘉義縣	3,174	3,711			6,885
彰化縣		11,477	11,260	11,957	34,694
臺中市		24,419			24,419
臺南市		14,214			14,214
澎湖縣		648	753	815	2,216
總計	42,258	137,835	40,267	39,957	260,317

(單位：人)

參、五年級檢測對象與檢測工具

一、對象

本次學力檢測之調查母體為 105 學年度臺灣地區 15 個縣市之五年級學生，全為普測，**數學科**有效作答 137,835 人，缺考率 1.81%。其就讀學校所處地區之都市化程度分布，乃依據侯佩君、杜素豪、廖培珊、洪永泰、章英華（2008）針對臺灣鄉鎮市區類型之研究的分類，將臺灣地區鄉鎮區分為以下七個集群：

1. **都會核心**：此集群的人口密度、專科及以上教育人口百分比、十五至六十四歲人口百分比及服務業人口百分比都最高。
2. **工商市區**：此集群的人口密度、專科及以上教育人口百分比、十五至六十四歲人口百分比及服務業人口百分比都僅次於都會核心，但相較於其他集群，仍是屬於商業高度發展的地區。
3. **新興市鎮**：此集群的服務業人口百分比、十五至六十四歲人口百分比、專科及以上教育人口百分比及人口密度都屬第三高，且工業人口百分比也特別明顯高於前兩個集群，而僅次於第四個集群，顯示此集群不僅具有活絡的工業生產活動，同時也擁有足夠的商業服務與相關工作能力的人來發展該項產業。
4. **傳統產業市鎮**：在此集群中，舉凡服務業就業人口、居住人口密度、十五至六十四歲人口百分比及居民教育程度等四項，皆次於前三個集群，惟工業人口百分比與六十五歲及以上人口百分比高於前三個集群。換言之，在這集群所屬的鄉鎮市區中，礙於就業人口的供給較低及為數不少的老年居民，其整體發展程度遠不如前幾個集群，而造成這些鄉鎮市區僅能固守既有的傳統產業。
5. **低度發展鄉鎮**：這個集群的特性是工商服務業的就業人口少、老年人口偏多、教育程度偏低，沒有明顯的工商業活動與發展。
6. **高齡化鄉鎮**：高齡化人口眾多為此集群特色，而伴隨著眾多老年人口的另一個特色，則為十五至六十四歲人口百分比在七個集群的排名最低。在這兩個條件的交互影響下，舉凡與工商服務業相關的屬性因子，在此集群中都排名較低，同時此集群也具有較低的人口密度與教育程度。
7. **偏遠鄉鎮**：工商業發展水平相當低度，且存有最低層級的教育程度及人數稀少的居民。

【表 3-1：臺灣地區與參與學力檢測學校所處地區之都市化程度】

都市化程度	臺灣地區國小校數（％）		參與檢測校數（％）		參與檢測人數（％）	
都會核心	209	7.85％	100	5.64％	23,497	17.05％
工商市區	459	17.25％	247	13.94％	32,494	23.57％
新興市鎮	609	22.89％	482	27.20％	49,714	36.07％
傳統產業市鎮	307	11.54％	293	16.53％	15,626	11.34％
低度發展鄉鎮	651	24.46％	374	21.11％	12,173	8.83％
高齡化鄉鎮	233	8.76％	200	11.29％	3,718	2.70％
偏遠鄉鎮	193	7.25％	76	4.29％	613	0.44％
總數	2,661（100％）		1,772（100％）		137,835（100％）	

註：三種顏色區塊為本院學力檢測公布網站（網址：<http://rap.naer.edu.tw>）中都市化的分級，其中紅、藍、綠分別為「都會與工商區」、「新興與傳統產業區」與「低度發展與偏遠區」，等三個級別。

由【表 3-1】可知，此次參加數學學力檢測學校所處地區之都市化程度分布，和臺灣地區學校分布相較，有所差異。「都會核心」、「工商市區」、「偏遠鄉鎮」三群均低於臺灣地區學校分布百分比，「新興市鎮」、「傳統產業市鎮」、「低度發展鄉鎮」及「高齡化鄉鎮」四群則高於臺灣地區學校分布百分比。

二、 試後數據

105 年度本院已架設學力檢測公布網站（網址：<http://rap.naer.edu.tw>），依權限分層（縣市端、學校端、班級端）給予不同施測後統計數據，主要提供 3 種檔案統計數據：第一個檔案為：全體選項答對率；第二個檔案是學生所在縣市、各主題答對率、平均答對題數等資訊，包含各校、各班各題答對率及選項答對率及個別學生逐題答對率；第三個檔案是分成三級（見【表 4-1】註）的都市化的區域，以及該縣的答對題數與百分等級對照表。

三、 不同都市化程度之區域數學學力表現

由【表 4-2】可知，學校所處地區不同都市化程度之數學學力是以「都會核心」和「工商市區」較高，能力值平均數分別是 0.23 和 0.12；整體數學學力能力最低的是「偏遠鄉鎮」，是 -0.86，「新興市鎮」的數學學力（-0.04）接近整體的平均（0.00）的數學學力表現。 M 的值是用試題反應理論所計算出來的學生能力值，大部分的 M 值落在 -3 到 3 之間，假設試題平均難度為 0，則 M 值越大代表學生程度越佳，反之則越差。

【表 3-2 不同都市化程度之國小五年級數學表現】

	五年級數學學力		
	N	M	SD
整體	137,835	0.00	1.20
都會核心	23,497	0.23	1.20
工商市區	32,494	0.12	1.20
新興市鎮	49,714	-0.04	1.19
傳統產業市鎮	15,626	-0.22	1.15
低度發展鄉鎮	12,173	-0.13	1.20
高齡化鄉鎮	3,718	-0.23	1.18
偏遠鄉鎮	613	-0.86	1.10

註： N 代表人數， M 代表平均數，是使用試題反應理論所計算出來的分數， SD 代表標準差

肆、 試題彙編

一、 評量架構

本次學力檢測以 97 年版課程綱要（分年細目）為命題架構，由【表 4-1】可知，數學科共有 25 題，其中數與計算的主題共有 12 題（含概念理解 5 題、程序執行 5 題、解題思考 2 題）、量與實測的主題共有 5 題（含概念理解 1 題、程序執行 2 題、解題思考 2 題）、代數的主題共有 3 題（含概念理解 2 題、程序執行 1 題）、幾何的主題共有 5 題（含概念理解 2 題、程序執行 2 題、解題思考 1 題）。

【表 4-1：雙向細目表】

五年級	概念理解	程序執行	解題思考	小計
數與計算	5	5	2	12
量與實測	1	2	2	5
代數	2	1	0	3
幾何	2	2	1	5
小計	10	10	5	25

【表 4-2：各題對應知識向度、能力指標、認知歷程、評量架構及數據】

題號	知識向度	認知歷程向度	97 課綱（分年細目）	答案	答對率	難易度	鑑別度
1	幾何	概念理解	5-s-04 能認識線對稱與簡單平面圖形的線對稱性質。	4	0.88	0.86	0.24
2	數與計算	程序執行	5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。	2	0.69	0.69	0.40
3	數與計算	概念理解	5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。	4	0.29	0.34	0.49
4	數與計算	程序執行	5-n-12 能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算。	2	0.77	0.76	0.36
5	代數	概念理解	5-a-02 能在具體情境中，理解先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除此兩數之積。	3	0.71	0.70	0.48

題號	知識向度	認知歷程向度	97 課綱（分年細目）	答案	答對率	難易度	鑑別度
6	代數	程序執行	5-a-03 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算。	3	0.43	0.47	0.64
7	代數	概念理解	5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加、減法的分配律，並運用於簡化計算。	4	0.49	0.50	0.53
8	幾何	程序執行	5-s-01 能透過操作，理解三角形三內角和為 180 度。	2	0.81	0.79	0.37
9	幾何	解題思考	5-s-05 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。（同 5-n-18）	1	0.34	0.38	0.45
10	幾何	概念理解	5-s-02 能透過操作，理解三角形任意兩邊和大於第三邊。	3	0.47	0.50	0.39
11	幾何	程序執行	5-s-07 能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。（同 5-n-20）	1	0.31	0.34	0.42
12	量與實測	程序執行	5-n-16 能認識重量單位「公噸」、「公噸」及「公斤」間的關係，並做相關計算。	1	0.68	0.67	0.54
13	量與實測	程序執行	5-n-15 能解決時間的乘除計算問題。	2	0.65	0.64	0.51
14	量與實測	解題思考	5-n-21 能理解容量、容積和體積間的關係。	1	0.74	0.72	0.50
15	量與實測	概念理解	5-n-19 能認識體積單位「立方公尺」、「立方公分」及「立方公尺」間的關係，並做相關計算。	4	0.53	0.55	0.59
16	量與實測	解題思考	5-n-17 能認識面積單位「公畝」、「公頃」、「平方公里」及其關係，並做相關計算。	2	0.23	0.28	0.35
17	數與計算	解題思考	5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。	1	0.73	0.72	0.44
18	數與計算	概念理解	5-n-07 能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。	3	0.68	0.66	0.58
19	數與計算	程序執行	5-n-04 能理解因數和倍數。	3	0.64	0.64	0.55
20	數與計算	程序執行	5-n-11 能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。	4	0.73	0.73	0.36


題號	知識向度	認知歷程向度	97 課綱（分年細目）	答案	答對率	難易度	鑑別度
21	數與計算	概念理解	5-n-13 能將分數、小數標記在數線上。	4	0.62	0.62	0.61
22	數與計算	概念理解	5-n-10 能認識多位小數，並做比較與加、減與整數倍的計算，以及解決生活中的問題。	4	0.62	0.62	0.54
23	數與計算	概念理解	5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。	2	0.41	0.46	0.58
24	數與計算	解題思考	5-n-03 能熟練整數四則混合計算。	3	0.35	0.39	0.33
25	數與計算	程序執行	5-n-06 能用約分、擴分處理等值分數的換算。	1	0.43	0.47	0.48

二、 試題參數名詞解釋

1. 選項率：指全體受測學生於此試題中選答各個選項的比例。
2. 高分組：指本測驗科目總分前 27% 學生，答對該試題人數百分比。
3. 低分組：指本測驗科目總分後 27% 學生，答對該試題人數百分比。
4. 通過率：試題的答對率。
5. 鑑別度：高分組的試題答對率－低分組的試題答對率。
0.40 以上：試題品質非常優秀；
0.30～0.39：優良，但可能需要修改；
0.20～0.29：尚可，但通常需要修改；
0.19 以下：劣，需要淘汰或修改。
6. 難易度：（高分組的試題答對率＋低分組的試題答對率）÷2。

伍、數學科試題解析與教學建議

第 1 題

知識向度	幾何	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-s-04 能認識線對稱與簡單平面圖形的線對稱性質。																														
題目	<p>小明畫出一個線對稱圖形「」(如下圖)，哪一條虛線是它的對稱軸？</p> <div data-bbox="743 589 1101 911"></div> <p>① 虛線 A ② 虛線 B ③ 虛線 C ④ 虛線 D</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：4</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.02</td><td>0.08</td><td>0.02</td><td>0.88</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.00</td><td>0.01</td><td>0.00</td><td>0.98</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.05</td><td>0.17</td><td>0.04</td><td>0.74</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：4	選項率	0.02	0.08	0.02	0.88	0.00		高分組	0.00	0.01	0.00	0.98	0.00		低分組	0.05	0.17	0.04	0.74	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：4																									
選項率	0.02	0.08	0.02	0.88	0.00																										
高分組	0.00	0.01	0.00	0.98	0.00																										
低分組	0.05	0.17	0.04	0.74	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.24，通過率為 0.88，試題難易度 0.86。

(二) 評量目標說明

本題旨在測驗學生是否理解平面圖形的線對稱性質，評量學生是否能從給定的圖形中找出對稱軸。

(三) 選項表現說明

1. 有 88%的學生選擇正確選項④，顯示大部分的學生已經掌握判別對稱圖形中

對稱軸的能力。

2. 有 8% 的學生選擇選項②，這些學生可能認為對稱軸一定是垂直線，而選擇選項②。
3. 有 2% 的學生選擇選項①，這些學生可能認為對角線就是對稱軸，而選擇選項①。
4. 有 2% 的學生選擇選項③，這些學生可能認為對角線就是對稱軸，而選擇選項③。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計主要希望了解學生，對於「線對稱圖形」中所謂的對稱軸，此一概念是否完全清楚。因此，在題目中劃出四條虛線，讓學生檢驗哪一條直線符合對稱軸的定義，檢視學生是否能從線對稱圖形中找出對稱軸。
2. 本題難易度為 0.86。有將近 9 成的學生已能掌握線對稱圖形中對稱軸的概念，但仍有 1 成多的學生，概念並不清楚。從高分組與低分組學生的表現來看，98% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生有 74% 回答正確，但有 17% 的低分組學生選擇選項②。顯示低分組學生中有許多學生人認為線對稱圖形中的對稱軸一定是垂直線，尚未掌握對稱軸的概念。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-s-04 能認識線對稱與簡單平面圖形的線對稱性質。

(二) 先備的知識

1. 4-s-03 能認識平面圖形全等的意義。
2. 4-s-06 能理解平面上直角、垂直與平行的意義。

(三) 延伸的知識

1. 8-s-06 能理解線對稱的意義，以及能應用到理解平面圖形的幾何性質。
2. 8-s-14 能用線對稱概念，理解等腰三角形、正方形、菱形、箏形等平面圖形。

十二年國教課綱（學習內容）（草案，送部版）

(一) 評量重點

S-5-4 **線對稱**：線對稱的意義。「對稱軸」、「對稱點」、「對稱邊」、「對稱角」。由操作活動知道特殊平面圖形的線對稱性質。利用線對稱做簡單幾何推理。製作或繪製線對稱圖形。

(二) 先備的知識

1. S-4-5 **垂直與平行**：以具體操作為主。直角是 90 度。直角常用記號。垂直於一線的兩線相互平行。平行線間距離處處相等。作垂直線；作平行線。

2. S-4-6 平面圖形的全等：以具體操作為主。形狀大小一樣的兩圖形全等。能在平移或旋轉對稱圖形上指認全等的部分。能用平移、旋轉做全等疊合。全等圖形之對應角相等、對應邊相等。

(三) 延伸的知識

S-8-11 梯形的基本性質：等腰梯形的兩底角相等；等腰梯形為線對稱圖形。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

在具體操作下，能找出圖形的對稱軸。


(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 認為對角線即是對稱軸：對於平行四邊形和等腰梯形學生常常未觀察仔細，便將對角線認為是圖形的對稱軸。
2. 認為對稱軸只有一條：尤其是對於正多邊形及圓形的對稱軸，許多學生常常認為只有一條對稱軸。因為學生雖然知道對稱軸的定義，但卻忽略在圖形上其他地方，仍然可以找出其他直線，讓圖形對摺後仍可以完全重疊。
3. 認為只有垂直線、水平線才能當作對稱軸：在圖形中除了水平線及垂直線有可能是對稱軸外，其他直線也有可能是對稱軸。例如：正方形的兩條對角線也是對稱軸。

(三) 核心概念的教學重點

1. 線對稱圖形的定義：一個平面圖形，如果可以找到一條直線，將圖形分成兩部分，沿著此直線對摺後，兩部分的圖形能夠完全疊合，此圖形稱為線對稱圖形。
2. 透過鏡子觀察：使用鏡子利用鏡射的方式讓學生觀察，鏡子必需放在圖形中的那一個地方與圖形互相垂直才能完全呈現圖形的另一半，形成一個線對稱圖形，同時讓學生了解鏡子所放的地方形成一條線，就是所謂的對稱軸。
3. 透過摺紙活動：教師可以提供日常生活中屬於線對稱的圖形，例如：建築物圖片、動物圖片、正多邊形……等圖片，讓學生透過摺疊的活動，找出對稱軸。實際觀察對稱圖形在對稱軸兩邊的圖形，經過摺疊以後會完全疊合。
4. 對稱點、對稱邊、對稱角的認識：老師可以指導學生將對稱圖形利用對稱軸摺疊後，觀察發現疊合的圖形中，可以找到相疊合的點、邊及角，並透過命名活動命名為對稱點、對稱邊、對稱角。
5. 畫出線對稱圖形：老師可以先透過釘板的操作，讓學生利用對稱軸的觀念，拼出對稱圖形的另一半。確認學生已熟悉對稱圖形的性質之後，可以進一步利用方格紙，讓學生畫出對稱圖形的另一半。

(四) 本題教學的加強重點

對於線對稱圖形「」，老師可以讓學生，嘗試著對A、B、C、D四條虛線透過鏡子利用鏡射方式觀察，哪一條線所產生的另一半圖形，會產生和題目中相同的圖形。或者利用對摺的方式，觀察利用哪一條線對摺後，直線兩邊的圖形會完全重疊。這條直線便是圖形的對稱軸。

第 2 題

知識向度	數與計算	認知向度	程序執行																												
對應分年細目	5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。																														
題目	冰箱裡有 $1\frac{8}{12}$ 桶豆花，平分給 4 位學生，每位可分得幾桶豆花？ ① $1\frac{2}{12}$ 桶 ② $\frac{5}{12}$ 桶 ③ $\frac{5}{3}$ 桶 ④ $\frac{2}{3}$ 桶																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：2</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.07</td><td>0.69</td><td>0.18</td><td>0.06</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.01</td><td>0.90</td><td>0.08</td><td>0.01</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.13</td><td>0.49</td><td>0.25</td><td>0.13</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.07	0.69	0.18	0.06	0.00		高分組	0.01	0.90	0.08	0.01	0.00		低分組	0.13	0.49	0.25	0.13	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																									
選項率	0.07	0.69	0.18	0.06	0.00																										
高分組	0.01	0.90	0.08	0.01	0.00																										
低分組	0.13	0.49	0.25	0.13	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.40，通過率為 0.69，試題難易度 0.69。

(二) 評量目標說明

本題是一個等分除的問題，但是被除數為帶分數，除數為整數，結果為分數，評量學生帶分數除以整數的計算能力。

(三) 選項表現說明

- 有 69% 的學生選擇正確選項②，顯示約 6 成 9 的學生已經掌握除數為整數的分數除法的意義。
- 有 18% 的學生選擇選項③，這些學生可能將帶分數 $1\frac{8}{12}$ 化成假分數 $\frac{20}{12}$ 後將分子分母皆除以 4，而求出選項③的答案。
- 有 7% 的學生選擇選項①，這些學生可能只將帶分數 $1\frac{8}{12}$ 中的分子除以 4，而求出選項①的答案。

4. 有 6% 的學生選擇選項④，這些學生可能將帶分數 $1\frac{8}{12}$ 中 $\frac{8}{12}$ 的分子及分母皆除以 4，且忽略了整數 1，而求出選項④的答案。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計主要希望了解學生，在分數除法的問題中，學生對於「 $\div m$ 」即是「 $\times \frac{1}{m}$ 」的計算技巧，是否能應用於解決日常生活中的問題，以及對於分數除法中被除數為帶分數，除數為整數的意義是否理解。
2. 本題難易度為 0.69。有將近 6 成 9 的學生能掌握除數為整數的分數除法的意義及計算技巧，但仍有將近 3 成多的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，90% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 49% 回答正確，有 51% 的低分組學生選擇其他的選項。顯示學生對於除數為整數的分數除法中，被除數為帶分數時的意義及計算技巧，並未充分掌握住。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。

(二) 先備的知識

1. 4-n-08 能認識真分數、假分數與帶分數，熟練假分數與帶分數的互換，並進行同分母分數的比較、加、減與整數倍的計算。
2. 5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。

(三) 延伸的知識

6-n-04 能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。

十二年國教課綱（學習內容）（草案，送部版）

(一) 評量重點

N-5-7 **分數除以整數**：分數除以整數的意義。最後將問題轉化為乘以單位分數。

(二) 先備的知識

1. N-4-5 **同分母分數**：一般同分母分數教學（包括「真分數」、「假分數」、「帶分數」名詞引入）。假分數和帶分數之變換。同分母分數的比較、加、減與整數倍。
2. N-5-5 **分數的乘法**：整數乘以分數、分數乘以分數的意義。知道用約分簡化乘法計算。處理乘積一定比被乘數大的錯誤類型。透過分數計算的公式，知道乘法交換律在分數也成立。

(三) 延伸的知識

N-6-3 **分數的除法**：整數除以分數、分數除以分數的意義。最後理解除以一數等於乘以其倒數之公式。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

除數為整數的分數除法的問題。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 計算方法錯誤

(1) 雖以除法列式，但卻用乘法來計算，例如 $\frac{3}{5} \div 7 = \frac{3}{5} \times 7$ 。

(2) 帶分數除以整數時，只做整數之間的運算，例如 $6\frac{3}{5} \div 2 = 3\frac{3}{5}$ 。

(3) 被除數的分子和分母皆除以整數，和約分的方法混淆， $\frac{8}{12} \div 2 = \frac{4}{6}$ 。

2. 不瞭解計算步驟：被除數倒置，除號改為乘號，例如 $\frac{3}{5} \div 7 = \frac{5}{3} \times 7$ 。

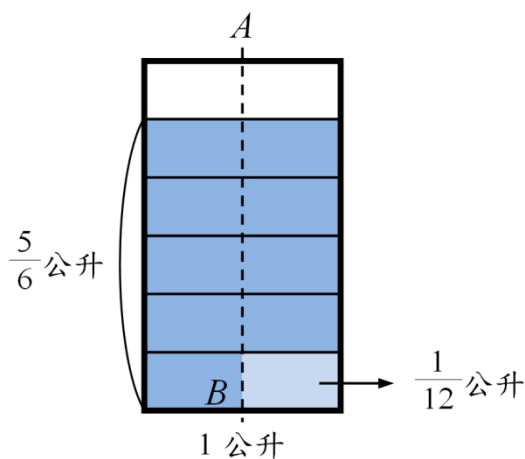
(三) 核心概念的教學重點

分數除以整數的問題可以是整數除法問題的延展。

1. **整數除法的問題：**以「4 公升的牛奶，要平分裝成 2 瓶牛奶，一瓶是幾公升？」為例。這是整數等分除的問題情境，我們可以把 4 公升看作 4 個 1 公升，要平分成 2 份後，再取其中一份。所以， $4 \div 2 = 2$ 得到每一份有 2 個 1 公升，也就是每一瓶有 2 公升。

2. **分數除以整數的問題：**

(1) **細分觀點引入：**以「 $\frac{5}{6}$ 公升的牛奶，要平分裝成 2 瓶牛奶，一瓶是幾公升？」。我們要將 5 個 $\frac{1}{6}$ 公升平分成 2 份，也就是把 5 個 $\frac{1}{6}$ 公升變成 10 個 $\frac{1}{12}$ 公升（中間那條切割線 AB，而一個格子表示 $\frac{1}{12}$ 公升，整體 1 是 1 公升，共平分成 $6 \times 2 = 12$ ，有 12 個格子），如【圖 2-1】。



【圖 2-1】

取其中一份，也就是每瓶有 $\frac{5}{12}$ 公升。算式記成： $\frac{5}{6} \div 2 = \frac{5 \times 2}{6 \times 2} \div 2 = \frac{10}{12} \div 2 = \frac{10 \div 2}{12} = \frac{5}{12}$ 。

(2) **分數倍的觀點引入：**以「 $\frac{5}{6}$ 公升的牛奶，要平分裝成2瓶牛奶，一瓶是幾公升？」。題意是說 $\frac{5}{6}$ 公升平分成2份取其中一份，從分數意義來看，題意與「 $\frac{5}{6}$ 公升的 $\frac{1}{2}$ 倍是多少公升？」相同，因此學生把問題視為分數的分數倍問題，把問題記成「 $\frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = ?$ 」再利用已學過的分數的乘法算則計算求出答案。算式記成： $\frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = 5 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$ 。

(3) 教師引導學生發現乘法記錄問題和除法記錄問題的事實是相同的，因此算式記錄可以寫成 $\frac{5}{6} \div 2 = \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$ ，學生最後要熟知「 $\div 2$ 」相當於「 $\times \frac{1}{2}$ 」之事實，並能熟練計算。教師布題可以有真分數除以整數、假（帶）分數除以整數的不同題型，也有離散量和連續量的不同情境題。

3. 教師教學時，讓學生了解「平分成2等份，也就是得到全部的 $\frac{1}{2}$ 」、「平分成3等份，也就是得到全部的 $\frac{1}{3}$ 」，多從情境理解以此類推的題型，熟知「 $\div m$ 」相當於「 $\times \frac{1}{m}$ 」。程序性知識：分數除以整數沒有餘數時，分子不變，分母乘以除數，即： $\frac{\text{分子}}{\text{分母}} \div \text{整數} = \frac{\text{分子}}{\text{分母} \times \text{整數}}$ 。

(四) **本題教學的加強重點：**

本題中，希望學生在理解題意後能以「 $\div m$ 」即是「 $\times \frac{1}{m}$ 」的計算技巧，列出算式 $1\frac{8}{12} \div 4 = 1\frac{8}{12} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$ 。但此題如果學生列出算式 $1\frac{8}{12} \div 4 = \frac{20 \div 4}{12} = \frac{5}{12}$ ，仍然可以得到相同的答案，老師可以藉此和學生探討其意義的不同。

第 3 題

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解
對應分年細目	5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。		
題目	下列敘述何者正確？ ① 2 和 4 的最小公倍數是 8 ② 2 和 4 的最小公因數是 2 ③ 4 和 8 的最大公倍數是 32 ④ 4 和 8 的最大公因數是 4		
答題表現 選項分析	----- 選 項 1 2 3 4 其他 答案：4 -----		
	選項率 0.19 0.34 0.18 0.29 0.00 -----		
	高分組 0.12 0.24 0.06 0.59 0.00 低分組 0.25 0.37 0.28 0.10 0.00 -----		

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.49，通過率為 0.29，試題難易度 0.34。

(二) 評量目標說明

本題是因數與倍數的考題，學生可使用列舉法列舉各數的因數與倍數，找出兩數的公倍數、公因數後，再判斷何者為最大公因數或何者為最小公倍數。

(三) 選項表現說明

1. 有 29% 的學生選擇正確選項④，顯示僅有 2 成 9 的學生掌握如何判斷兩數的最大公因數及最小公倍數的能力。
2. 有 34% 的學生選擇選項②，這些學生可能不知道兩數最小公因數就是 1，而選擇選項②。
3. 有 19% 的學生選擇選項①，這些學生可能認為最小公倍數就是兩數相乘，因此選擇選項①。
4. 有 18% 的學生選擇選項③，這些學生可能不知道兩數的公倍數中只有最小公倍數而沒有最大公倍數，而選擇選項③。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計主要是希望了解學生，對於「最大公因數」、「最小公倍數」的意義是否了解。並能使用列舉法，找出兩數的最大公因數及最小公倍數。
2. 本題難易度為 0.34。只有 2 成 9 的學生理解何謂最大公因數、何謂最小公倍數，高達將近 7 成多的學生無法判斷。從高分組與低分組學生的表現來看，59% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 10% 回答正確，有 90% 的低分組學生選擇其他的選項。顯示學生對於公因數中有最大公因數，而公倍數中只有最小公倍數的概念並未充分掌握。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。

(二) 先備的知識

1. 5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。
2. 5-n-04 能理解因數和倍數。

(三) 延伸的知識

1. 6-n-01 能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解（質數 <20 ，質因數 <20 ，被分解數 <100 ）。
2. 6-n-02 能用短除法求兩數的最大公因數、最小公倍數。

十二年國教課綱（學習內容）（草案，送部版）

(一) 評量重點

N-5-3 公因數和公倍數：因數、倍數、公因數、公倍數、最大公因數、最小公倍數的意義。

(二) 先備的知識

1. N-2-6 乘法：乘法的意義與應用。在學習乘法過程，逐步發展「倍」的概念，做為統整乘法應用情境的語言。
2. N-4-2 較大位數之乘除計算：處理乘數與除數為多位數之乘除直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。

(三) 延伸的知識

1. N-6-1 20 以內的質數和質因數分解：小於 20 的質數與合數。2、3、5 的質因數判別法。以短除法做質因數的分解。
2. N-6-2 最大公因數與最小公倍數：質因數分解法與短除法。兩數互質。運用到分數的約分與通分。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

透過分別列舉因數、倍數的方式找出兩數的公因數、公倍數。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. **基本概念的理解困難**：對於「公因數」、「公倍數」、「最大公因數」、「最小公倍數」等概念上的誤解。
2. **對於兩數之間的基本關係混淆**：例如對於何者為「因數」、「倍數」；何者為兩數之間的「公因數」、「公倍數」、「最大公因數」、「最小公倍數」等名詞的認識不足，因此出現混淆情形。

(三) 核心概念的教學重點

1. **公因數、最大公因數**：這是二數之間對於因數的探討，在進行公因數教學時，可先請學生分別列舉出兩數各自的因數，在兩數各自的因數中有相同者，即為公因數。例如：18 的因數有：1、2、3、6、9、18；24 的因數有：1、2、3、4、6、8、12、24，相同的因數為：1、2、3、6，即為兩數之間的公因數。而公因數中最大者，即為二數之間的最大公因數；以上面的例子為例 6 為 4 個公因數中最大者，因此 6 就是 18 和 24 的最大公因數。
2. **公倍數**即為兩數共有的倍數，而**最小公倍數**即為公倍數中最小者，以 18 和 24 為例，18 的倍數有 18、36、54、72、90、108、126、144……等，24 的倍數有：24、48、72、96、120、144……等，我們可以引導學生在分別列舉後，發現 72、144……為 18 和 24 共有的倍數，即為二數的公倍數，同時可以發現只要是 72 的倍數一定會是 18 和 24 的公倍數，並引導學生發現 18 和 24 的最小公倍數為 72，但找不到最大的公倍數。老師可以再舉例說明，讓學生發現，任意兩個大於零的整數，可以找到最小公倍數，但找不到最大的公倍數。
3. 任何大於零的整數一定有 1 的因數，而且是最小的因數，因此任意兩個整數的最小公因數必為 1。

(四) 本題教學的加強重點

老師可以藉由此題利用列舉法和學生探討「最大公因數」、「最小公倍數」的概念，解題時教師可依下列步驟做為參考，幫助學生解決問題。

步驟1：先使用列舉法：2 的因數有 {1、2}；4 的因數有 {1、2、4}；8 的因數有 {1、2、4、8}。

步驟2：2 和 4 的公因數有 {1、2}；4 和 8 的公因數有 {1、2、4}。觀察 2 和 4 的公因數與 4 和 8 的公因數，可以發現 2 和 4 及 4 和 8 最小的公因數都為 1。2 和 4 的最大公因數為 2；4 和 8 的最大公因數為 4。

步驟3：再列出幾個 2 和 4 的公倍數為 {4、8、12、……}，及 4 和 8 的公倍數為 {8、16、24、……}，觀察後可以發現，2 和 4 的公倍數中可以找到一個最小的公倍數為 4，但無法找到最大的公倍數。同樣的，4 和 8 的公倍數中，可以找到一個最小的公倍數為 8，但無法找到最大的公倍數。

第 4 題

知識向度	數與計算	認知向度	程序執行																												
對應分年細目	5-n-12 能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算。																														
題目	雜貨店將 12 公斤的麵粉平均分裝成 125 包，每包麵粉重多少公斤？ ① 0.0096 公斤 ② 0.096 公斤 ③ 0.96 公斤 ④ 9.6 公斤																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：2</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.08</td><td>0.77</td><td>0.10</td><td>0.05</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.03</td><td>0.94</td><td>0.03</td><td>0.01</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.13</td><td>0.58</td><td>0.20</td><td>0.09</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.08	0.77	0.10	0.05	0.00		高分組	0.03	0.94	0.03	0.01	0.00		低分組	0.13	0.58	0.20	0.09	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																									
選項率	0.08	0.77	0.10	0.05	0.00																										
高分組	0.03	0.94	0.03	0.01	0.00																										
低分組	0.13	0.58	0.20	0.09	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.36，通過率為 0.77，試題難易度 0.76。

(二) 評量目標說明

本題是整數除以整數，可以整除且商為三位小數的應用問題，評量學生能否理解在等分除的情境下，運用小數除法解決生活問題的能力。

(三) 選項表現說明

- 有 77% 的學生選擇正確選項②，顯示 7 成 7 的學生已經掌握整數除以整數，商為三位小數的計算能力。
- 有 10% 的學生選擇選項③，這些學生在進行整數除以整數，商為小數的直式計算時，商的小數點位置錯誤。

$$\begin{array}{r}
 0.96 \\
 125 \overline{) 1200} \\
 \underline{1125} \\
 750 \\
 \underline{750} \\
 0
 \end{array}$$

3. 有 8% 的學生選擇選項①，這些學生在進行整數除以整數，商為小數的直式計算時，商的小數點位置錯誤。

$$\begin{array}{r} 0.0096 \\ 125 \overline{) 1200} \\ \underline{1125} \\ 750 \\ \underline{750} \\ 0 \end{array}$$

4. 有 5% 的學生選擇選項④，這些學生在進行整數除以整數，商為小數的直式計算時，商的小數點位置錯誤。

$$\begin{array}{r} 9.6 \\ 125 \overline{) 1200} \\ \underline{1125} \\ 750 \\ \underline{750} \\ 0 \end{array}$$

(四) 學生表現說明

1. 本題命題主要希望了解學生理解題意後，能列出整數除以整數的算式，並經由直式計算正確算出餘數為零，商為三位小數的答案，檢視學生能否將小數除法的計算能力應用於解決日常生活問題。
2. 本題難易度為 0.76。有 7 成 7 的學生對於整數除以整數，商為三位小數的計算已能掌握，但仍有將近 2 成多的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，94% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 58% 回答正確，有 42% 的低分組學生對於整數除以整數，商為三位小數的計算技巧並未充分掌握住。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-12 能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算。

(二) 先備的知識

1. 4-n-07 理解分數之「整數相除」的意涵。
2. 4-n-11 能認識二位小數與百分位的位名，並做比較。
3. 5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。

(三) 延伸的知識

6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。

十二年國教課綱（學習內容）（草案，送部版）**（一） 評量重點**

N-5-9 整數、小數除以整數（商為小數）：整數除以整數（商為小數）、小數除以整數的意義。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。能用概數協助處理除不盡的情況。熟悉分母為 2、4、5、8 之真分數所對應的小數。

（二） 先備的知識

1. N-4-2 較大位數之乘除計算：處理乘數與除數為多位數之乘除直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。
2. N-5-06 整數相除之分數表示：從分裝（測量）和平分的觀點，分別說明整數相除為分數之意義與合理性。

（三） 延伸的知識

1. N-6-4 小數的除法：整數除以小數、小數除以小數的意義。直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。處理商一定比被除數小的錯誤類型
2. N-6-5 解題：整數、分數、小數的四則應用問題：二到三步驟的應用解題。含使用概數協助解題。

三、 教學建議**（一） 評量核心概念**

以直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算（整除）。

（二） 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 對分數為「整數相除」的意涵不了解：因此學生對算式中被除數小於除數會感到懷疑與不確定，如： $1 \div 8$ 可能會在列式時寫成 $8 \div 1$ 。
2. 對小數沒有估算的數感：因此對於商的小數點位置沒有概念，以致於出現小數除法直式計算中商的小數點位置錯誤（如下列直式）。

$$\begin{array}{r} 0.125 \\ 8 \overline{) 1.0} \\ \underline{8} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

小數點位置正確

$$\begin{array}{r} 1.25 \\ 8 \overline{) 1.0} \\ \underline{8} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

小數點位置錯誤

$$\begin{array}{r} 12.5 \\ 8 \overline{) 1.0} \\ \underline{8} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

小數點位置錯誤

3. 對於被除數位值有 0 的意義不了解：所以當除法直式的餘數小於除數時，就以為不能再分了，不知補 0 的意義是換成更小的位值後可以繼續分。

（三） 核心概念的教學重點

1. 分數有「整數相除」意涵：整數除以整數可以表示為分數，所以分數有「整數相除」的意涵。在教學上應讓學生透過實物進行等分除或包含除的具體操

作，再連結到整數相除的數學算式，最後連結到整數相除的分數表達形式，例如：4 個蛋糕平分給 2 個人，列式為 $4 \div 2$ ，故 1 個蛋糕平分給 4 個人，列式為 $1 \div 4$ ，所以每人可以分到 $\frac{1}{4}$ 個蛋糕。若學生對於分數有「整數相除」的意涵了解，當被除數小於除數時，學生才不易產生混淆。

2. **培養小數除法估算的數感：**練習整數相除的運算時，培養學生的數感可以幫助學生估算商的值，例如：1 個蛋糕分給 4 個人， $1 \div 4 = (\quad)$ ，每個人分到的蛋糕應該不到一半，所以應該小於 $\frac{1}{2}$ ，也就是小於 0.5。有了數感，學生在標示商的小數點位置時才不容易錯誤。

(四) 本題教學的加強重點

在整數除以整數，商為小數的直式計算中，餘數小於除數時，需將餘數的下一個位值補 0，表示換成更小的位值繼續分。學生若對餘數補 0 的意義不了解，容易造成計算時的位值錯誤，因此教師需澄清並讓學生了解餘數補 0 的意義。

此題老師也可以和學生探討從分數和小數之間換算的觀點解題。學生理解題意後，可以列出算式 $12 \div 125 = \frac{12}{125} = \frac{12 \times 8}{125 \times 8} = \frac{96}{1000} = 0.096$ ，同樣可以算出答案。

第 5 題

知識向度	代數	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-a-02 能在具體情境中，理解先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除此兩數之積。																														
題目	「一包糖果有 50 顆，老師買了 4 包，想平分給 2 個班級的學生，每班可以分到幾顆糖果？」下列哪一個算式 <u>不能</u> 算出正確答案？ ① $50 \times 4 \div 2$ ② $50 \div 2 \times 4$ ③ $50 \div (4 \times 2)$ ④ $50 \times (4 \div 2)$																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：3</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.11</td><td>0.08</td><td>0.71</td><td>0.10</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.02</td><td>0.01</td><td>0.94</td><td>0.02</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.21</td><td>0.15</td><td>0.46</td><td>0.18</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：3	選項率	0.11	0.08	0.71	0.10	0.00		高分組	0.02	0.01	0.94	0.02	0.00		低分組	0.21	0.15	0.46	0.18	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：3																									
選項率	0.11	0.08	0.71	0.10	0.00																										
高分組	0.02	0.01	0.94	0.02	0.00																										
低分組	0.21	0.15	0.46	0.18	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.48，通過率為 0.71，試題難易度 0.70。

(二) 評量目標說明

本題旨在測驗學生除了能列出算式外，是否理解四則運算規則中先乘再除與先除再乘的結果是相同的，但 $a \times (b \div c)$ 並不等於 $a \div (b \times c)$ 。

(三) 選項表現說明

- 有 71% 的學生選擇正確選項③，顯示約 7 成多的學生掌握住四則運算中先乘再除與先除再乘的結果相同，亦即 $a \times b \div c = a \div c \times b$ ，但 $a \times (b \div c)$ 和 $a \div (b \times c)$ 的結果是不同的。
- 有 11% 的學生選擇①，這些學生可能不理解題意，無法透過解題步驟正確列出本題算式。也可能誤解題意，未注意到題目問「錯誤」。
- 有 10% 的學生選擇④，這些學生可能不理解 $a \times (b \div c)$ 和 $a \div (b \times c)$ 的結果是不同的。
- 有 8% 的學生選擇②，這些學生可能不理解算式中先乘再除與先除再乘的結

果相同。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計為主要希望學生能在具體情境中，理解先乘再除與先除再乘的結果相同。但是遇到乘號後有括號的運算，與除號後有括號的運算則是不同情境下的運算，藉由此題檢視學生是否能夠分辨兩者運算結果是不同的。
2. 本題難易度為 0.70。有 7 成多的學生能理解先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除此兩數之積的概念。但仍有將近 3 成的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，94% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 46% 回答正確，有 56% 的低分組學生選擇其他的選項。顯示學生對於四則運算中先乘再除與先除再乘的結果相同並未充分掌握住，為何 $a \times (b \div c)$ 和 $a \div (b \times c)$ 的結果是不同的也不理解。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-a-02 能在具體情境中，理解先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除此兩數之積。

(二) 先備的知識

4-a-01 在具體情境中，理解乘法結合律。

(三) 延伸的知識

6-n-07 能在具體情境中，對整數及小數在指定位數取概數（含四捨五入法），並做加、減、乘、除之估算。

十二年國教課綱（學習內容）（草案，送部版）

(一) 評量重點

R-5-2 四則計算規律 (II)：乘除混合計算。「乘法對加法的分配律」。將計算規律應用於簡化混合計算。熟練整數四則混合計算。

(二) 先備的知識

R-4-2 四則計算規律 (I)：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。

(三) 延伸的知識

N-6-5 解題：整數、分數、小數的四則應用問題。二到三步驟的應用解題。含使用概數協助解題。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

先乘再除與先除再乘的結果相同，以及 $a \times b \div c = (a \times b) \div c = a \times (b \div c)$ (非 $a \div b \times c$)

$$=a\div(b\times c)), \text{ 但 } a\times(b\div c)\neq a\div(b\times c)。$$

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 對四則運算中丟掉括號後的運算不清楚：因為 $a\times(b\div c)=a\times b\div c$ ，學生常會誤以為 $a\div(b\times c)=a\div b\times c$ 。事實上 $a\div(b\times c)=a\div b\div c$ ，兩者是屬於不同情境下的運算。
2. 對交換律的誤解：因為加法和乘法有交換律，而 $a\times b\div c=a\div c\times b$ ，學生便誤以為 $a\div(b\times c)=a\times(b\div c)$ 或是 $a\div(b\times c)=a\div b\times c$ 。

(三) 核心概念的教學重點

1. 理解「先乘再除」與「先除再乘」的計算結果相同

對於 $a\times b\div c=a\div c\times b$ ，這是乘法交換律的延伸，因為 $a\times b\div c=a\times b\times\frac{1}{c}=a\times\frac{1}{c}\times b=a\div c\times b$ ，所以最後計算的結果必然相等。

老師在教學時，可以舉例如下：「蘋果 1 公斤賣 240 元，現在有 6 位同學想要合買 4 公斤的蘋果，平均每人要付多少錢？」並且和學生探討下面所提供的兩個方法，所列出的算式不同，結果會如何？

方法1：先算出 4 公斤的蘋果總共是多少元，再讓 6 位同學平均分攤全部的錢。列出 $240\times 4\div 6$ 這個式子，再計算出每人要付 160 元。

方法2：先算出平均每個人 1 公斤要負擔多少元，再算出 4 公斤蘋果每個人各要付多少元。因此可以列出算式 $240\div 6\times 4$ 計算出每人要付 160 元。

可以發現兩個方法所得到的結果相同。

2. 「乘號後有括號」與「除號後有括號」的計算結果不同

對於 $a\times b\div c$ 這個算式而言，其實就是 $a\times(b\times\frac{1}{c})=a\times b\times\frac{1}{c}$ 所以計算結果必然相同。但是， $a\div(b\times c)$ 其實是 $a\times\frac{1}{b\times c}$ ，因此其計算結果必然和 $a\times(b\times\frac{1}{c})=a\times b\times\frac{1}{c}$ 是不同的。

老師教學時，可以舉例如下：「老師有 320 枝鉛筆，全部平分給班上的 8 組學生，每組的學生有 4 人，每位學生可以分到幾支鉛筆？」並且和學生探討下面所提供的兩個方法，所列出的算式不同，結果會如何？

方法1：先算出全班有多少位學生之後，再計算將 320 枝鉛筆平分給每位學生，每位學生可以分得幾支鉛筆要如何列式？可以列出 $320\div(8\times 4)$ 這個式子。再計算出每位學生可以分到 10 枝鉛筆。

方法2：如果 320 枝鉛筆平分給各組之後，各組在將每組分到的鉛筆平分給每組的人，要如何列式？可以列出 $320\div 8\div 4$ 這個式子，

計算出每位同學可以分到 10 枝鉛筆。

可以發現兩個式子的結果是相同的。

但如果用 $320 \times (8 \div 4)$ 所計算出的結果是不同的。這個式子所代表的意思，可以看成將 8 位同學平分成 4 組，每組有 2 人，每人可以分到 320 枝鉛筆，所以每一組可以分到 640 枝鉛筆，意思和前面的兩個式子是完全不同的。

(四) 本題的教學重點

此題主要讓學生理解「先乘再除」與「先除再乘」，其實運算結果會相同。但是，乘號後有括號的運算與除號後有括號的運算結果不同。老師可以讓學生對 $50 \times 4 \div 2$ 、 $50 \div 2 \times 4$ 、 $50 \div (4 \times 2)$ 、 $50 \times (4 \div 2)$ 分別做計算，並討論式子所代表的意思，便可發現其中有個算式與其他算式的結果不相同，意思也完全不同。

第 6 題

知識向度	代數	認知向度	程序執行				
對應分年細目	5-a-03 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算。						
題目	下列哪一個算式能夠算出「 $24+12\div3\times4$ 」的答案？ ① $36\div3\times4$ ② $24+12\div12$ ③ $24+4\times4$ ④ $(24+12)\div(3\times4)$						
答題表現 選項分析	<hr/>						
	選 項	1	2	3	4	其他	答案：3
	<hr/>						
	選項率	0.17	0.17	0.43	0.23	0.00	
	<hr/>						
	高分組	0.07	0.09	0.79	0.05	0.00	
	低分組	0.24	0.22	0.15	0.39	0.00	
<hr/>							

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.64，通過率為 0.43，試題難易度 0.47。

(二) 評量目標說明

本題是四則混合計算題型，要求學生熟練整數加、減、乘的混合計算，評量學生是否知道「先乘除，後加減」、「有括號先計算」和「由左至右計算」的運算方式。

(三) 選項表現說明

- 有 43% 的學生選擇正確選項③，顯示約四成的學生已經掌握整數四則混合計算中「先算乘除、後算加減」能力。
- 有 23% 的學生選擇④，這些學生未能理解有括號的部分是應該先進行計算的，因此加了括號會導致運算的結果不同。
- 有 17% 的學生選擇①，這些學生未能理解在進行整數四則混合計算時，應先算乘除的部分，再算加減的部分。
- 有 17% 的學生選擇②，這些學生已能掌握先算「 \times 」、「 \div 」，再「 $+$ 」、「 $-$ 」的原則，但未能理解在整數四則混合計算的過程中如果同時出現「 \times 」和「 \div 」的運算符號時，應依循由左至右計算的原則進行計算。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計旨在了解學生對於「整數四則混合計算」的規約是否熟悉，由學生就題目所安排四個選項中的算式來進行判斷，判斷這四個算式是否和題目「 $24+12\div3\times4$ 」的計算結果相同。本題評量的目的不在於要求學生一定要將答案計算出來，而是在於了解學生對於「整數四則混合計算」中的「括號先計算」、「先算乘除後算加減」、「由左至右進行計算」等三項約定的做法是否能充分理解，並作為判斷的方法。
2. 本題難易度為 0.47。有近四成的學生能熟練運用四則運算的性質，但仍有六成多的學生無法正確解題。從高分組與低分組學生的表現來看，79%的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 15% 回答正確，且各有超過 2 成的學生分別選擇選項①和②，顯示學生對於「先算乘除後算加減」、「由左至右進行計算」的運算規則未能理解。其中更有多達 39% 的低分組學生選擇選項④，顯示學生對於整數四則混合計算的解題原則並未充分掌握住，無法分辨算式中加上括號的意義與與運算的優先性。

二、 教材地位分析**97 課綱（分年細目）****(一) 評量重點**

5-a-03 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算。

(二) 先備的知識

4-a-02 能在四則混合計算中，運用數的運算性質。

(三) 延伸的知識

6-a-04 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗答案的合理性。

十二年國教課綱（學習內容）（草案，送部版）**(一) 評量重點**

R-5-2 四則計算規律（II）：乘除混合計算。「乘法對加法的分配律」。將計算規律應用於簡化混合計算。熟練整數四則混合計算。

(二) 先備的知識

1. R-4-1 兩步驟問題併式：併式是代數學習的重要基礎。含四則混合計算的約定（由左往右算、先乘除後加減、括號先算）。學習逐次減項計算。
2. R-4-2 四則計算規律（I）：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。

(三) 延伸的知識

R-6-1 數的計算規律：小學最後應認識（1）整數、小數、分數都是數，享有一樣的計算規律。（2）整數乘除計算及規律，因分數運算更容易理解。（3）逐漸體會乘法和除法的計算實為一體。併入其他教學活動。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

知道併式運算的先後順序（熟悉運算性質）。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 對於四則運算的規則不清楚：因此學生習慣由左至右進行運算，或是算式中看起來好算的部份先算而造成計算錯誤，如下列兩個錯誤計算的算式：

(1) $35-5\times 4=120$ （學生由左至右計算，因此先算 $35-5$ ，再算 30×4 ，因此計算錯誤。）

(2) $25\times 7-5=50$ （學生先算比較好算的 $7-5$ ，再算 25×2 ，因此計算錯誤。）

2. 對於併式的過程及方式不了解：因此無法理解「括號先算」、「先乘除、後加減」等算則的意義，例如： $7\times 18=126$ ， $7\times 12=84$ ， $126+84=210$ 。如果先算 $18+12=30$ ，再算 $7\times 30=210$ ，可以簡化計算，因此可以併式為 $7\times (18+12)$ 。當學生不了解這個併式過程及括號先算的意義時，就無法理解各種四則運算的算則，而只是一味的從左至右逐項運算。

3. 誤解分配律與結合律的意義：以為分配律的反推算式就是結合律。例如：因為 $8\times (3+2)=8\times 3+8\times 2$ 是乘法對加法的分配律，學生誤解 $8\times 3+8\times 2=8\times (3+2)$ 就是乘法對加法的結合律，其實 $8\times 3+8\times 2=8\times (3+2)$ 只是分配律的反推算式，仍然屬於分配律。

4. 誤將結合律運用在減法與除法運算：因為加法和乘法有結合律，而以為減法和除法也有結合律。例如：因為 $(8+2)+5=8+(2+5)$ 及 $(12\times 5)\times 2=12\times (5\times 2)$ 都會成立，所以學生誤解 $(32\div 8)\div 2$ 等同 $32\div (8\div 2)$ 或 $(10-8)-2$ 等同 $10-(8-2)$ 也會成立。

5. 誤認交換律適用於減法與除法運算：因為加法和乘法有交換律，而以為減法和除法也有交換律。例如：因為 $3+4=4+3$ 及 $5\times 6=6\times 5$ 成立，所以學生誤解 $3-5$ 等同 $5-3$ 或 $2\div 8$ 等同 $8\div 2$ ，因此容易出現不去理解題意，直接用大數減小數或用大數除以小數。尤其是分數的除法，如題目是 2 個批薩分給 8 個人，學生常列成錯誤算式： $8\div 2$ 。

6. 錯誤延伸分配律在減法與除法運用：因為乘法對加、減法有分配律，而以為除法對加、減法也有分配律。因為乘法對加、減法有左右分配律，所以可以說乘法對加、減法的分配律成立；而除法對加減法只有右分配律，即 $(12+6)\div 3=12\div 3+6\div 3$ ，但是 $36\div (9+3)\neq 36\div 9+36\div 3$ ，所以除法對加、減法的分配律不成立。

(三) 核心概念的教學重點

1. 理解題意後再列式及學習併式

教師應利用多步驟問題讓學生從理解題意後有次序的一一系列式解題，待學生能熟練解決多步驟問題後再開始學習併式。教學時需同時呈現多步驟算

式，再慢慢過渡到併式記錄問題。

例如：「小明口袋有 1 個 10 元硬幣和 6 個 5 元硬幣，請問小明共有多少元？」學生理解題意後多步驟解題算式可能為： $6 \times 5 = 30$ ， $10 + 30 = 40$ ；引導學生併式為 $10 + 6 \times 5 = (\quad)$ ，再討論因為乘或除是連加或連減的簡化記錄形式，因此運算位階高於加或減，所以約定「先乘除後加減」。括號先算也是利用併式需求而產生的共同約定算則。

2. 乘法對加法的分配律

乘法對加法有右分配律及左分配律，乘號在加號右邊時，例如： $(6 + 4) \times 5 = 6 \times 5 + 4 \times 5$ ，稱為乘法對加法的右分配律；乘號在加號左邊時，例如： $8 \times (7 + 3) = 8 \times 7 + 8 \times 3$ ，稱為乘法對加法的左分配律。

教師應用具體的情境讓學生理解乘法對加法的分配律為何會成立，情境題的數字可以設計成用分配律計算更容易，以產生使用分配律的需求，例如：「一打鉛筆有 12 枝，小明有黃色鉛筆 8 打，小華有紅色鉛筆 2 打，兩人共有幾枝鉛筆？」引導學生發現 $12 \times 8 + 12 \times 2 = (\quad)$ 比較不容易計算，若能利用分配律改成 $12 \times 8 + 12 \times 2 = 12 \times (8 + 2) = 12 \times 10 = 120$ ，計算上會容易許多。

3. 乘法對減法的分配律

乘號在減號右邊時，例如：「 $(8 - 5) \times 9 = 8 \times 9 - 5 \times 9$ 」稱為乘法對減法的右分配律；乘號在減號左邊時，例如：「 $10 \times (9 - 4) = 10 \times 9 - 10 \times 4$ 」稱為乘法對減法的左分配律。

教師應用具體的情境讓學生理解乘法對減法的分配律為何會成立，情境題的數字可以設計成用分配律計算更容易，以產生使用分配律的需求。例如：「一打鉛筆有 12 枝，小明有黃色鉛筆 8 打，小華有紅色鉛筆 2 打，小明比小華多幾枝鉛筆？」引導學生發現 $12 \times 8 - 12 \times 2 = (\quad)$ 比較不容易計算，若能利用分配律改成 $12 \times 8 - 12 \times 2 = 12 \times (8 - 2) = 12 \times 6 = 72$ ，計算上會容易許多。

4. 加法與乘法的結合律

在連加算式中， $(5 + 3) + 7 = 5 + (3 + 7)$ ，所以加法有結合律；在連乘算式中， $(17 \times 5) \times 2 = 17 \times (5 \times 2)$ ，所以乘法也有結合律。

教師應用具體的情境讓學生理解加法與乘法的結合律為何會成立，情境題的數字可以設計成用結合律計算更容易，以產生使用結合律的需求，如有一個長 24 公分、寬 8 公分、高 5 公分長方體，它的體積是多少？」由於長方體是由許多 1 立方公分的白色積木堆疊而來，所以計算體積＝長×寬×高時，可以先算前面，為「 $(24 \times 8) \times 5$ 」；也可以先算後面，為「 $24 \times (8 \times 5)$ 」。其體積雖然相同，但學生會發現先算 8×5 會比較容易計算。

(四) 本題教學的加強重點

1. 理解整數四則運算的意義

數的計算範疇中，是由加法與減法構築而成，乘法與除法是由加法與減法發展而來。因此，多個數的連加，可以用乘法來進行表示，例如：

$3+3+3+3+3=12$ ，可以用 $3\times 4=12$ 來表示連加的結果。某數被同一個數連減多次，可用除法來簡記此數可以被減的次數，例如：

$30-6-6-6-6-6=0$ ，所以可用 $30\div 6=5$ 來表示 30 可以被 6 減 5 次。

因此，在四則混合計算中，要先將乘法和除法還原成基本的加法和減法的概念，再使用約定的原則或符號來增進計速算的效率，例如： $3\times 4=(3+3+3+3)$ ，這也是後續大家約定在四則混合計算的原則考量：「有括號先計算」、「先算乘除後算加減」，同算乘、除或是同算加、減時，需「由左至右計算」。

2. 熟悉整數四則運算的方法

學生能初步理解加法與乘法、減法與除法的關連性後，教師接續應利用多步驟問題的布題，讓學生理解題意後有次序的一一列式解題，待學生能熟練解決多步驟問題後再開始學習併式。

教學時需同時呈現多步驟算式，再慢慢過渡到併式紀錄問題。例如：「小明口袋有 1 個 10 元硬幣和 6 個 5 元硬幣，請問小明共有多少元？」學生理解題意後多步驟解題算式可能為： $6\times 5=30$ ， $10+30=40$ ；引導學生併式為 $10+6\times 5=(\quad)$ ，再對應乘法 6×5 的部分是連加 $5+5+5+5+5+5$ 的簡化記錄形式。因此乘與除的運算位階高於加或減，所以約定「先乘除、後加減」、「括號先算」也是利用併式需求而產生的共同約定算則。

因此在進行本題教學時，教師應透過適切的提問讓學生熟悉基本之整數四則運算原則：「有括號先計算」、「先算乘除、後算加減」、同算乘除或是同算加減時，需「由左至右計算」。以本題 $24+12\div 3\times 4$ 為例，教師可請學生依「先算乘除，後算加減」的規約判斷，可知先算的部分應該為 $12\div 3\times 4$ ，又因為這個部分同時包含「 \div 」、「 \times 」二個運算符號，因此需「由左向右計算」，得到「 $4\times 4=16$ 」，最後再回到題目中將「 $+$ 」的部分進行計算，得到 $24+16=40$ 。

第 7 題

知識向度	代數	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加、減法的分配律，並運用於簡化計算。																														
題目	<p>「學校開闢三塊長方形菜園，第一塊菜園的長為 3 公尺、寬為 2 公尺；第二塊菜園的長為 3 公尺、寬為 4 公尺；第三塊菜園的長為 3 公尺、寬為 5 公尺。這三塊菜園的面積共是多少平方公尺？」</p> <p>下列哪一個算式能算出正確答案？</p> <p>① $(3+3+3) \times (2+4+5)$</p> <p>② $3 \times 2 + 4 + 5$</p> <p>③ $3 \times (2 \times 4 \times 5)$</p> <p>④ $3 \times (2 + 4 + 5)$</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：4</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.30</td><td>0.04</td><td>0.16</td><td>0.49</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.18</td><td>0.01</td><td>0.04</td><td>0.77</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.39</td><td>0.10</td><td>0.28</td><td>0.24</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：4	選項率	0.30	0.04	0.16	0.49	0.00		高分組	0.18	0.01	0.04	0.77	0.00		低分組	0.39	0.10	0.28	0.24	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：4																									
選項率	0.30	0.04	0.16	0.49	0.00																										
高分組	0.18	0.01	0.04	0.77	0.00																										
低分組	0.39	0.10	0.28	0.24	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.53，通過率為 0.49，試題難易度 0.50。

(二) 評量目標說明

本題是整數四則運算的算式題，要求學生能理解整數四則運算的各種算則，評量學生是否具備應用各種算則以簡化計算的能力。

(三) 選項表現說明

- 有 49% 的學生選擇正確選項④，顯示約五成的學生已經能在具體情境中，理解乘法對加、減法的分配律，並運用於簡化計算能力。
- 有 30% 的學生選擇①，這些學生可能對於面積和長度的實際量感未能有深刻的體驗，認為將不同的長方形的長相加與寬相加，再將總長和總寬相乘，即為所有長方形的面積相加。
- 有 16% 的學生選擇③，這些學生可能已發覺這三個長方形的長皆為 3 公分，嘗試以分配律的觀念進行解題，但在簡化計算的過程中，無法以正確的記錄

方式整合算式，誤以為將相加的三個數字加上括號後，會變成相乘，導致錯誤。

4. 有 4% 的學生選擇②，這些學生可能已發覺這三個長方形的長皆為 3 公分，嘗試以分配律的觀念進行解題，但在簡化計算的過程中，無法以正確的記錄方式整合算式，將共同的長度 3 提出來時，其餘三個不同長方形的寬應使用括號將三者相加後再乘以 3。

(四) 學生表現說明

1. 本題的設計情境為給定學生三個長同樣是 3 公尺，寬各不相同的長方形菜園，並在選項中設計四個算式，其用意即在檢驗學生是否了解乘法對加、減法具有分配律的特性，並能用來簡化計算以解決生活中的問題。多數學生能以直接計算的方式將三個長方形菜園的面積相加，但老師如能引導學生認識乘法對加、減法的具有分配律的特性，當更能促進解決問題的效率。
2. 本題難易度為 0.50。有將近五成的學生能理解乘法對加、減法的分配律，並運用於簡化計算，但仍有另外五成的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，77% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 24% 回答正確。有 39% 的低分組學生選擇①的選項，顯示學生對於實際情境可能較為陌生，未充分掌握住長方形面積的計算方式與量感，認為三個長的和與三個寬的和的乘積，即是三個長方形面積相加。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-a-01 能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算。

(二) 先備的知識

1. 4-a-01 能在具體情境中，理解乘法結合律。
2. 4-a-02 能在四則混合計算中，應用數的運算性質。

(三) 延伸的知識

1. 5-a-03 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算。
2. 6-a-04 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗答案的合理性。

十二年國教課綱（學習內容）（草案，送部版）

(一) 評量重點

R-5-2 四則計算規律 (II)：乘除混合計算。「乘法對加法的分配律」。將計算規律應用於簡化混合計算。熟練整數四則混合計算。

(二) 先備的知識

1. R-4-1 兩步驟問題併式：併式是代數學習的重要基礎。含四則混合計算的約

定（由左往右算、先乘除後加減、括號先算）。學習逐次減項計算。

2. R-4-2 四則計算規律（I）：兩步驟計算規則。加減混合計算、乘除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質。

（三） 延伸的知識

R-6-1 數的計算規律：小學最後應認識（1）整數、小數、分數都是數，享有一樣的計算規律。（2）整數乘除計算及規律，因分數運算更容易理解。（3）逐漸體會乘法和除法的計算實為一體。併入其他教學活動。

三、 教學建議

（一） 評量核心概念

利用乘法對加法的分配律簡化計算過程。

（二） 學生常見的錯誤類型／迷思概念

- 對於四則運算的規則不清楚：因此學生習慣由左至右進行運算，或是算式中看起來好算的部份先算而造成計算錯誤，如下列兩個錯誤計算的算式：
 - $35 - 5 \times 4 = 120$ 。學生由左至右計算，因此先算 $35 - 5$ ，再算 30×4 ，因此計算錯誤。
 - $25 \times 7 - 5 = 50$ 。學生先算比較好算的 $7 - 5$ ，再算 25×2 ，因此計算錯誤。
- 對於併式的過程及方式不了解：因此無法理解「括號先算」、「先乘除、後加減」等算則的意義，例如： $7 \times 18 = 126$ ， $7 \times 12 = 84$ ， $126 + 84 = 210$ 。如果先算 $18 + 12 = 30$ ，再算 $7 \times 30 = 210$ ，可以簡化計算，因此可以併式為 $7 \times (18 + 12)$ 。當學生不了解這個併式過程及括號先算的意義時，就無法理解各種四則運算的算則，而只是一味的從左至右逐項運算。
- 以為分配律的反推算式就是結合律：因為 $8 \times (3 + 2) = 8 \times 3 + 8 \times 2$ 是乘法對加法的分配律，學生誤以為 $8 \times 3 + 8 \times 2 = 8 \times (3 + 2)$ 就是乘法對加法的結合律，其實 $8 \times 3 + 8 \times 2 = 8 \times (3 + 2)$ 只是分配律的反推算式，仍然屬於分配律。
- 誤將結合律運用在減法與除法運算：因為加法和乘法有結合律，而以為減法和除法也有結合律。例如：因為 $(8 + 2) + 5 = 8 + (2 + 5)$ 及 $(12 \times 5) \times 2 = 12 \times (5 \times 2)$ 都會成立，所以學生誤解 $(32 \div 8) \div 2$ 等同 $32 \div (8 \div 2)$ 或 $(10 - 8) - 2$ 等同 $10 - (8 - 2)$ 也會成立。
- 誤認交換律適用於減法與除法運算：因為加法和乘法有交換律，而以為減法和除法也有交換律。例如：因為 $3 + 4 = 4 + 3$ 及 $5 \times 6 = 6 \times 5$ 成立，所以學生誤解 $3 - 5$ 等同 $5 - 3$ 或 $2 \div 8$ 等同 $8 \div 2$ ，因此容易出現不去理解題意，直接用大數減小數或用大數除以小數。尤其是分數的除法，如題目是 2 個批薩分給 8 個人，學生常列成錯誤算式： $8 \div 2$ 。
- 錯誤延伸分配律在減法與除法運用：因為乘法對加、減法有分配律，而以為除法對加、減法也有分配律。因為乘法對加、減法有左右分配律，所以可以說乘法對加、減法的分配律成立；而除法對加減法只有右分配律，即

$(12+6)\div3=12\div3+6\div3$ ，但是 $36\div(9+3)\neq36\div9+36\div3$ ，所以除法對加、減法的分配律不成立。

(三) 核心概念的教學重點

1. 理解題意後再列式及學習併式

教師應利用多步驟問題讓學生從理解題意後有次序的一一系列式解題，待學生能熟練解決多步驟問題後再開始學習併式。教學時需同時呈現多步驟算式，再慢慢過渡到併式記錄問題。

例如：「小明口袋有 1 個 10 元硬幣和 6 個 5 元硬幣，請問小明共有多少元？」學生理解題意後多步驟解題算式可能為： $6\times5=30$ ， $10+30=40$ ；引導學生併式為 $10+6\times5=(\quad)$ ，再討論因為乘或除是連加或連減的簡化記錄形式，因此運算位階高於加或減，所以約定「先乘除後加減」。括號先算也是利用併式需求而產生的共同約定算則。

2. 乘法對加法的分配律

乘法對加法有右分配律及左分配律，乘號在加號右邊時，例如： $(6+4)\times5=6\times5+4\times5$ ，稱為乘法對加法的右分配律；乘號在加號左邊時，例如： $8\times(7+3)=8\times7+8\times3$ ，稱為乘法對加法的左分配律。

教師應用具體的情境讓學生理解乘法對加法的分配律為何會成立，情境題的數字可以設計成用分配律計算更容易，以產生使用分配律的需求，例如：「一打鉛筆有 12 枝，小明有黃色鉛筆 8 打，小華有紅色鉛筆 2 打，兩人共有幾枝鉛筆？」引導學生發現 $12\times8+12\times2=(\quad)$ 比較不容易計算，若能利用分配律改成 $12\times8+12\times2=12\times(8+2)=12\times10=120$ ，計算上會容易許多。

3. 乘法對減法的分配律

乘號在減號右邊時，例如： $(8-5)\times9=8\times9-5\times9$ 稱為乘法對減法的右分配律；乘號在減號左邊時，「 $10\times(9-4)=10\times9-10\times4$ 」稱為乘法對減法的左分配律。

教師應用具體的情境讓學生理解乘法對減法的分配律為何會成立，情境題的數字可以設計成用分配律計算更容易，以產生使用分配律的需求，例如：「一打鉛筆有 12 枝，小明有黃色鉛筆 8 打，小華有紅色鉛筆 2 打，小明比小華多幾枝鉛筆？」引導學生發現 $12\times8-12\times2=(\quad)$ 比較不容易計算，若能利用分配律改成 $12\times8-12\times2=12\times(8-2)=12\times6=72$ ，計算上會容易許多。

4. 加法與乘法的結合律

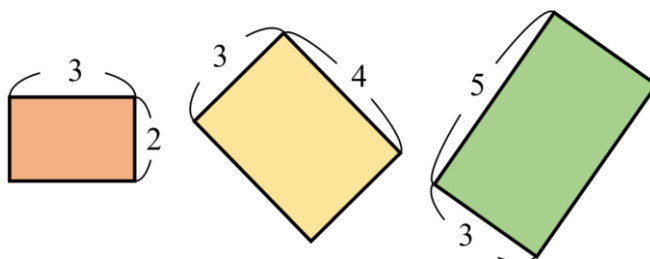
在連加算式中， $(5+3)+7=5+(3+7)$ ，所以加法有結合律；在連乘算式中， $(17\times5)\times2=17\times(5\times2)$ ，所以乘法也有結合律。

教師應用具體的情境讓學生理解加法與乘法的結合律為何會成立，情境題的數字可以設計成用結合律計算更容易，以產生使用結合律的需求，如有一個長 24 公分、寬 8 公分、高 5 公分長方體，它的體積是多少？」由於長方體是由許多 1 立方公分的白色積木堆疊而來，所以計算體積＝長×寬×高

時，可以先算前面，為「 $(24 \times 8) \times 5$ 」；也可以先算後面，為「 $24 \times (8 \times 5)$ 」。
其體積雖然相同，但學生會發現先算 8×5 會比較容易計算。

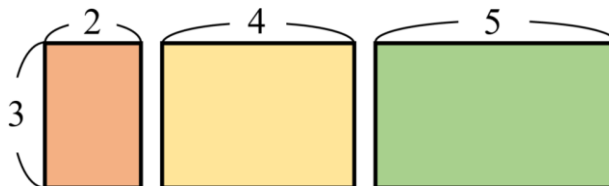
(四) 本題教學的加強重點

本題題目給定三個長方形的長與寬，並詢問三者的面積總和。在一開始可先在黑板上依比例繪出三個長方形，如【圖 7-1】，並要求學生進行列式，學生可能直觀的將三個長方形面積直接算出後相加，例如： $3 \times 2 + 3 \times 4 + 3 \times 5$ 。

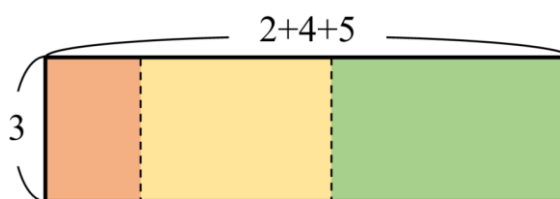


【圖 7-1】

接續可引導學生觀察這個算式，並和同學討論如何簡化算式？有學生會發現都有 3，此時老師可順勢將三個長方形排列成【圖 7-2】，引導學生確認這三個長方形的寬都是共同的 3 個長度單位，長的部分分別是 2、4、5 個長度單位；接續可再將圖形調整成【圖 7-3】，再和學生討論發現了什麼？此時學生可發現三個長方形可以拼成一個大的長方形，接著和學生討論這個大長方形面積的寬仍為 3 個長度單位，但長則是 $2+4+5$ 個長度單位，其面積的計算方式為 $3 \times (2+4+5)$ 。最後一步步引導學生發現並理解 $3 \times 2 + 3 \times 4 + 3 \times 5 = 3 \times (2+4+5)$ 。

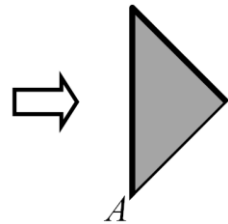
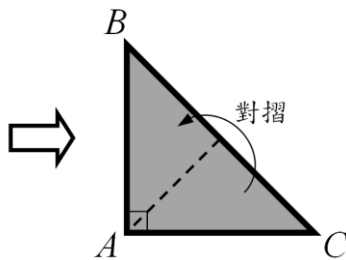
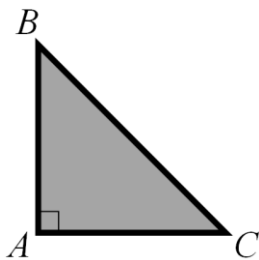


【圖 7-2】



【圖 7-3】

第 8 題

知識向度	幾何	認知向度	程序執行																												
對應分年細目	5-s-01 能透過操作，理解三角形三內角和為 180 度。																														
題目	<p>三角形 ABC 中角 A 是直角（如圖一），<u>小明</u>將三角形對摺（如圖二），發現角 B 和角 C 完全疊合（如圖三），角 B 是幾度？</p> <div></div> <p>圖一 圖二 圖三</p> <p>① 30 度 ② 45 度 ③ 60 度 ④ 90 度</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：2</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.06</td><td>0.81</td><td>0.05</td><td>0.08</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.01</td><td>0.98</td><td>0.01</td><td>0.01</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.13</td><td>0.60</td><td>0.10</td><td>0.17</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.06	0.81	0.05	0.08	0.00		高分組	0.01	0.98	0.01	0.01	0.00		低分組	0.13	0.60	0.10	0.17	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																									
選項率	0.06	0.81	0.05	0.08	0.00																										
高分組	0.01	0.98	0.01	0.01	0.00																										
低分組	0.13	0.60	0.10	0.17	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.37，通過率為 0.81，試題難易度 0.79。

(二) 評量目標說明

本題旨在評量學生是否理解三角形的三個內角和為 180 度，學生必須知道本題三角形的三個內角和且能辨別直角三角形中，其中有二個角相同時，為等腰直角三角形，才能正確算出角 B 的角度。

(三) 選項表現說明

1. 有 81%的學生選擇正確選項選項②，顯示約 8 成的學生已經了解並能應用三角形的三內角和為 180 度的概念解題。

2. 有 8% 的學生選擇選項④，這些學生可能受到圖三兩角疊合示意圖的影響，而將角 B 和角 C 的度數相加。
3. 有 6% 的學生選擇選項①，這些學生對於三角形的構成要素認知不足，無法由題目給定的條件中分辨角 B 的度數，又同時受到教師上課所常用之三角板教具之印象影響，認為角 $B=30$ 度。
4. 有 5% 的學生選擇選項③，這些學生對於三角形的構成要素認知不足，無法由題目給定的條件中分辨角 B 的度數，又同時受到教師上課所常用之三角板教具之印象影響，認為角 $B=60$ 度。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計為給予一個完整的三角形，透過對摺後疊合的情形，讓學生推論角 B 的角度是多少，其目的在希望了解學生能夠在不同的情況下，清楚的知道三角形的三個內角是指哪三個，並利用所學過三角形三個內角和為 180 度的觀念，求出所指定的內角的角度。
2. 本題難易度為 0.79。有將近八成的學生能透過操作，進而分辨與理解三角形三內角和為 180 度，但仍有二成左右的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，98% 的高分組學生能正確回答問題，低分組學生有 60% 回答正確，有 40% 的低分組學生選擇其他的選項。選答①與③的學生無法從題目給定的條件訊息中做答，傾向於以直觀的經驗及課堂學習記憶選擇答案，而選項④有將近二成的低分組學生選擇，顯示學生對於角度大小的判準量感需再加強。因此由本題作答情形來說，低分組的學生對於三角形的內角和為 180 度的觀念未能充分理解，無法由給定的題目條件中判斷出內角的個別角度。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-s-01 能透過操作，理解三角形三內角和為 180 度。

(二) 先備的知識

1. 3-s-04 能認識角，並比較角的大小。（同 3-n-17）
2. 4-s-02 能透過操作，認識基本三角形與四邊形的簡單性質。

(三) 延伸的知識

無直接相關條目。

十二年國教課綱（學習內容）（草案，送部版）

(一) 評量重點

S-5-1 三角形與四邊形的性質：操作活動與簡單推理。含三角形三內角和為 180 度。三角形任意兩邊和大於第三邊。平行四邊形的對邊等、對角相等。

(二) 先備的知識

S-3-1 角度（同 N-3-13）：以具體操作為主。初步認識、直接比較與間接比較。

認識直角。S-4-7：三角形：以邊與角的特徵認識特殊三角形並能作圖。如正三角形、等腰三角形、直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形。

(三) 延伸的知識

無直接相關條目。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

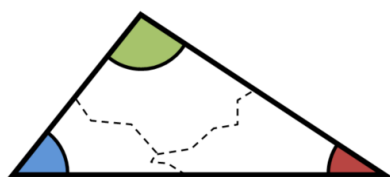
知道一種常用三角板的三內角為 45-45-90 度（等腰直角三角形）。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 在進行多個角的比較時，受到圖形標示的影響，認為各個角度受圖形面積大小影響而有不同：圖示中角所表示的面積越大，則該角的角度越大。
2. 受既有教具、教材影響，以為三角形三個內角的角度依序是「30 度、60 度、90 度」或「45 度、45 度、90 度」二種而已。
3. 亂用標示的角度作答：學生不知道三角形的內角和為 180 度，也不知道三角形的內角是指哪三個角，只是用圖上標示出的角度任意計算當作答案。

(三) 核心概念的教學重點

1. 教學時，必須指導學生實際使用量角器透過測量，以及剪裁三角形的三個內角後，將三個剪裁後的角拼成一個平角的方式，讓學生理解三角形的三內角和為 180 度。並藉由不同的三角形透過實際操作，讓學生發現任意三角形的三內角和為 180 度，不宜直接向學生宣告任意三角形的三內角和為 180 度。
2. 指導學生剪裁時可讓學生在三角形上，用不同的色筆將三個內角塗上不同的顏色，如【圖 8-1】。再將三個內角剪下拼成一個平角，如【圖 8-2】。以避免學生剪下三個內角後，無法分辨在原三角形的位置。



【圖 8-1】

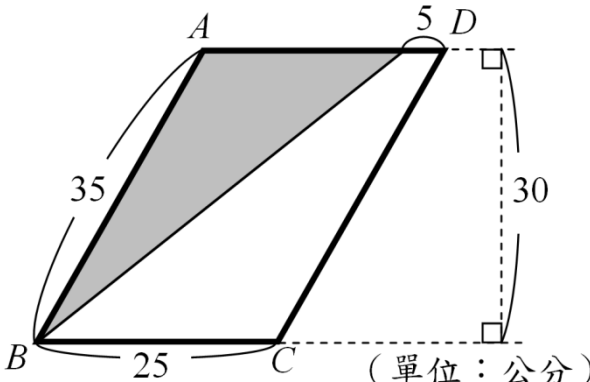


【圖 8-2】

(四) 本題教學的加強重點

1. 本題旨在讓學生學會判斷三角形之角 A、角 B、角 C 的個別度數及三個內角和的度數總和，並利用給定之條件判定此三角形為等腰直角三角形，必要時，運用教具或紙板製作，並讓學生實際操作進行檢驗，他們將會清楚角 A 是 90 度，角 B 和角 C 因為疊合所以大小相同。
2. 學生獲取上述二個條件後的訊息，即能計算出角 B 的度數了。

第 9 題

知識向度	幾何	認知向度	解題思考																												
對應分年細目	5-s-05 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。（同 5-n-18）																														
題目	<p>一個平行四邊形 $ABCD$ 中，灰色三角形（如下圖）的面積是多少平方公分？</p>  <p>（單位：公分）</p> <p>① 300 平方公分 ② 350 平方公分 ③ 600 平方公分 ④ 700 平方公分</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><th>選 項</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>其他</th><th>答案：1</th></tr><tr><td>選項率</td><td>0.34</td><td>0.31</td><td>0.18</td><td>0.17</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.61</td><td>0.22</td><td>0.12</td><td>0.06</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.16</td><td>0.35</td><td>0.24</td><td>0.26</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：1	選項率	0.34	0.31	0.18	0.17	0.00		高分組	0.61	0.22	0.12	0.06	0.00		低分組	0.16	0.35	0.24	0.26	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：1																									
選項率	0.34	0.31	0.18	0.17	0.00																										
高分組	0.61	0.22	0.12	0.06	0.00																										
低分組	0.16	0.35	0.24	0.26	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.45，通過率為 0.34，試題難易度 0.38。

(二) 評量目標說明

本題在於評量學生是否能理解三角形的面積計算方式，並能在平行四邊形與梯形的圖形中，找出三角形正確的底與高，正確將三角形的面積算出。

(三) 選項表現說明

1. 有 34% 的學生選擇正確選項①，顯示這些學生已能正確找出圖形中三角形

的底邊，並正確分辨三角形的高。

2. 有 31% 的學生選擇②，這些學生能將三角形的底邊確認為 20 公分，然而卻將其鄰邊誤認為三角形的高，所以用 $20 \times 35 \div 2$ ，算出三角形的面積為 350 平方公分。
3. 有 18% 的學生選擇③，這些學生能將三角形的底邊確認為 20 公分，亦能找出正確的高為 30 公分，但在計算三角形的面積時，忘記將 20×30 計算後的結果 $\div 2$ ，因此算出來的三角形面積為 600 平方公分。
4. 有 17% 的學生選擇④，這些學生能將三角形的底邊確認為 20 公分，然而卻將其鄰邊誤認為三角形的高，接續進行三角形面積的計算時，又忘記將計算後的結果 $\div 2$ ，因此算出來的三角形面積為 $20 \times 35 = 700$ 平方公分。

(四) 學生表現說明

1. 本題中，灰色部分的三角形有一底邊與平行四邊形的一邊相互重疊但長度不相等，且二者高的長度相同，這些是解題的關鍵之處。因此本題的命題設計重點在於檢驗學生對於三角形的構成要素及面積、平行四邊形的面積等是否理解且能正確進行計算。
2. 本題難易度為 0.38。有三成多的學生能充分辨別圖形中的三角形底邊與找到正確的高，並正確掌握三角形面積的計算方式，但仍有超過六成多的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，61% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 16% 回答正確，有 84% 的低分組學生選擇選項②、③、④，顯示低分組多數學生未能正確找出三角形的高（將鄰邊當成高），及對三角形面積的計算方法，亦未能正確掌握。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-s-05 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。（同 5-n-18）

(二) 先備的知識

1. 4-s-07 能認識平行四邊形和梯形。
2. 4-s-09 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。（同 4-n-18）
3. 5-n-18 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。（同 5-s-05）

(三) 延伸的知識

6-s-01 能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。

十二年國教課綱（學習內容）（草案，送部版）

(一) 評量重點

S-5-2 三角形與四邊形的面積：操作活動與推理。利用切割重組，建立面積公

式，並能應用。

(二) 先備的知識

1. N-3-14 面積：「平方公分」。實測、量感、估測與計算。
2. S-4-7 三角形：以邊與角的特徵認識特殊三角形並能作圖。如正三角形、等腰三角形、直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形。
3. S-4-8 四邊形：以邊與角的特徵（含平行）認識特殊四邊形並能作圖。如正方形、長方形、平行四邊形、菱形、梯形。

(三) 延伸的知識

S-6-4 柱體體積與表面積：含角柱和圓柱。利用簡單柱體，理解「柱體體積＝底面積 \times 高」的公式。簡單複合形體體積。

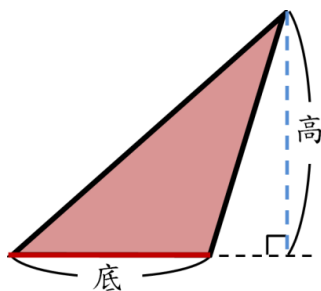
三、教學建議

(一) 評量核心概念

由實際切割重組中，認識三角形的面積公式＝（底 \times 高） $\div 2$ 。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 受既有解題印象影響：認為圖示中的三角形即是平行四邊形的一半，因此以平行四邊形的邊當作三角形的底。以本題為例：學生以為灰色部分的三角形面積是平行四邊形 $ABCD$ 的一半，即依以往答題習慣將灰色的三角形的底邊視為平行四邊形 $ABCD$ 圖形中的線段 AD ，未能發覺灰色三角形的底邊比平行四邊形 $ABCD$ 之邊長少了 5 公分。
2. 無法找出在三角形外的高：學生遇到求三角形面積時，對於如何畫出三角形的高不是非常清楚。如果可以從頂點順利做垂直線段到底邊，便能找出三角形的高。但如果是如【圖 9-1】的三角形，便無法找出三角形的高，因此也無法順利求出三角形的面積。



【圖 9-1】

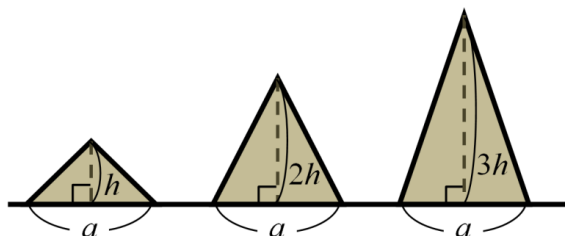
3. 不清楚三角形面積公式的由來：三角型的面積公式為底 \times 高 $\div 2$ ，學生列式時因為不知道三角形面積公式的由來，常常在計算底 \times 高之後會忘記 $\div 2$ 。計算時導致無法正確算出三角形的面積。

(三) 核心概念的教學重點

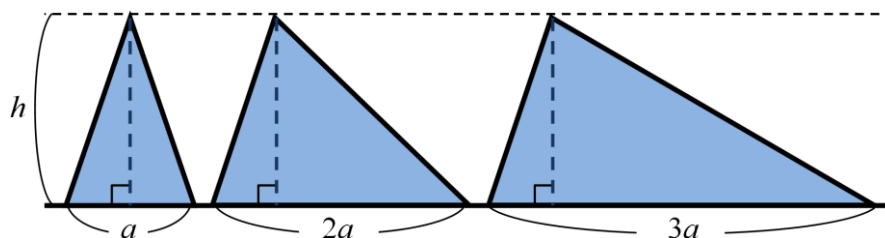
1. 國小五年級的學生，對於長方形面積公式的由來及意義應該均已熟悉。一般

來說，可以利用切割及重新拼湊的方式將三角形及梯形，變形成平行四邊形後導出三角形及梯形面積公式，並探討三角形、梯形的高及底，改變後面積會如何改變及其之間的關係。

2. 學生知道三角形的面積公式為「底 \times 高 $\div 2$ 」之後，再和學生探討當三角形的底不變，高增加幾倍，三角形的面積就會變為原來面積的幾倍，如【圖 9-2】；三角形的高不變，底增加幾倍，三角形的面積就會變為原來面積的幾倍。如【圖 9-3】。

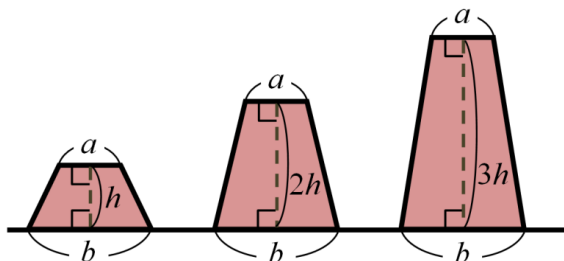


【圖 9-2】



【圖 9-3】

3. 同樣，學生知道梯形的面積公式為「(上底+下底) \times 高 $\div 2$ 」之後，再和學生探討梯形的上底和下底不變，高增加幾倍，梯形的面積就會變為原來面積的幾倍，如【圖 9-4】。



【圖 9-4】

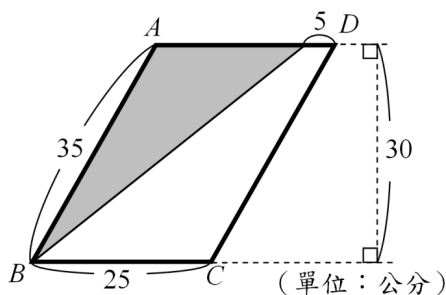
(四) 本題教學的加強重點

1. 對於基本幾何圖形的認識

- (1) 引導學生回想三角形面積、平行四邊形的面積的計算方式。
- (2) 請學生觀察本題中三角形 ABD 和平行四邊形 $ABCD$ 二者之間的關係：有共用一個邊、有相同的高、其中亦應引導學生仔細分辨三角形確切的三個邊、三個角的位置。

2. 對於三角形面積計算方式的掌握：國小五年級的學生，對於三角形面積公式的由來及意義應已熟悉。一般來說，可以利用切割的方式將長方形延對角線平均切割成二個全等的三角形，即公式中除以二的考量原因。

3. **三角形的高的判定：**三角形有三個邊，以任一底邊進行面積計算時，須找出與底邊垂直的高，方能正確計算出三角形的面積。
4. 解題時教師可依下列步驟做為參考，幫助學生解決問題。



【圖 9-5】

- (1) 提示學生觀察本題【圖 9-5】當中灰色部分的三角形，欲求出其面積時，應先將底邊及其對應的高找出來：此三角形底邊為平行四邊形其中一邊 BC 的對邊，還要再減去 5 公分，即 $25 - 5 = 20$ 公分。
- (2) 【圖 9-5】中，三角形的高應為右側以虛線部分標示的 30 公分。
- (3) 最後，確認學生能以三角形面積公式「底 \times 高 $\div 2$ 」正確計算出三角形的面積。

第 10 題

知識向度	幾何	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-s-02 能透過操作，理解三角形任意兩邊和大於第三邊。																														
題目	妹妹有兩根竹籤，長度分別是 13 公分及 5 公分，妹妹想要拼出一個三角形，還需要下列哪一根長度的竹籤？ ① 6 公分 ② 8 公分 ③ 10 公分 ④ 19 公分																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：3</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.15</td><td>0.20</td><td>0.47</td><td>0.19</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.08</td><td>0.09</td><td>0.69</td><td>0.14</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.21</td><td>0.29</td><td>0.30</td><td>0.19</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：3	選項率	0.15	0.20	0.47	0.19	0.00		高分組	0.08	0.09	0.69	0.14	0.00		低分組	0.21	0.29	0.30	0.19	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：3																									
選項率	0.15	0.20	0.47	0.19	0.00																										
高分組	0.08	0.09	0.69	0.14	0.00																										
低分組	0.21	0.29	0.30	0.19	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.39，通過率為 0.47，試題難易度 0.50。

(二) 評量目標說明

本題的命題設計旨在了解學生，對於「任意兩邊和大於第三邊」，此一概念是否完全清楚，學生能利用已給定長度的二個邊來進行檢驗，找出可以構成三角形的第三個邊的長度。

(三) 選項表現說明

- 有 47% 的學生選擇正確選項③，顯示將近 50% 的學生已經掌握以「任意兩邊和大於第三邊」的概念判別三角形是否成立的能力。
- 有 20% 的學生選擇②，這些學生可能無法掌握「任意兩邊和大於第三邊」的概念，未能檢驗出 $8+5=13$ ，無法構成三角形。
- 有 19% 的學生選擇④，這些學生可能無法掌握「任意兩邊和大於第三邊」的概念，未能檢驗出 $13+5<19$ ，無法構成三角形。
- 有 15% 的學生選擇①，這些學生可能無法掌握「任意兩邊和大於第三邊」的概念，未能檢驗出 $6+5<13$ ，無法構成三角形。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計為主要希望了解學生，對於「三角形任意兩邊和大於第三邊」，此一概念是否完全清楚。因此，在題目中給定一個三角形的二個邊，讓學生據以判別，檢視學生能否充分的檢視符合條件的每一個邊長。
2. 本題難易度為 0.50。有四成七的學生能掌握以「任意兩邊和大於第三邊」的概念判別三角形是否成立的能力，但仍有五成多的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，69%的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 30%回答正確，約各有近 2 成的低分組學生分別選擇①和④，另外選擇②的學生將近三成，顯示學生對於三角形三個邊的構成關係未能充分掌握，認為僅需判定題目給定的其中二個邊的條件即可，未能理解應將三角形的三個邊「任意兩邊和大於第三邊」的概念，透過操作擇定任意二邊的和皆須大於的三邊來進行多次的比較，才是完整的檢驗。

二、 教材地位分析**97 課綱（分年細目）****(一) 評量重點**

5-s-02 能透過操作，理解三角形任意兩邊和大於第三邊。

(二) 先備的知識

4-s-02 能透過操作，認識基本三角形與四邊型的簡單性質。

(三) 延伸的知識

6-s-01 能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。

十二年國教課綱（學習內容）（草案，送部版）**(一) 評量重點**

S-5-1 三角形與四邊形的性質：操作活動與簡單推理。含三角形三內角和為 180 度。三角形任意兩邊和大於第三邊。平行四邊形的對邊等、對角相等。

(二) 先備的知識

S-4-7 三角形：以邊與角的特徵認識特殊三角形並能作圖。如正三角形、等腰三角形、直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形。

(三) 延伸的知識

S-8-8 三角形的基本性質：等腰三角形兩底角相等；非等腰三角形大角對大邊，大邊對大角；三角形兩邊和大於第三邊；外角等於其內對角和；連比的記錄；三內角為 30° 、 60° 、 90° 其邊長比記錄為「 $1:\sqrt{3}:2$ 」；三內角為 45° 、 45° 、 90° 其邊長比記錄為「 $1:1:\sqrt{2}$ 」。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

三角形任意兩邊和大於第三邊。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 僅以其中二個邊進行檢驗：學生僅挑選其中的二個邊或是題目給定的二個邊進行檢驗，忽略三角形成型的性質是「任意兩邊和皆大於的三邊」，因此要將三個邊皆進行檢驗。
2. 受到等腰三角形的干擾：因等腰三角形的其中二個邊長度相等，因此學生誤以為「其中二邊長度相同，皆可以構成三角形」，而忽略了需將另一個邊納入比較。

(三) 核心概念的教學重點

1. 對於三角形構成要素的認識

- (1) 三角形的構成要素：三個邊、三個頂點、三個角。
- (2) 「三個邊」是區隔圖形內部及外部的直線段；「頂點」是邊的端點重合為一點的地方；「角」是在頂點附近，由一邊要轉到另一邊的局部圖形。

2. 對於三角形邊角關係的理解

- (1) 三個邊固定其中二邊的長度，透過動手操作改變夾角，藉以觀察第三邊的長度變化，並發現當「任意兩邊和大於第三邊、任意兩邊差小於的第三邊」時，才能夠成為一個三角形。
- (2) 可透過相關學具例如：竹筷子、扣條的操作進行上述活動的體驗；也可以考慮透過線上動畫讓學生發現三角形的邊角關係。

3. 實際操作進行檢驗

- (1) 對於「三角形任意兩邊的和大於第三邊」一般常見的教法，是提供多個不同長度的紙條、竹籤或是使用幾何扣條，讓學生嘗試組合出一個或多個三角形，學生在嘗試的過程中有時能組成三角形，有時不能組成三角形。此時老師不妨提醒學生觀察紙條、竹籤或是幾何扣條的長度，發現能組成三角形與不能組成三角形時的邊長有什麼關係，讓學生透過觀察發現「三角形任意兩邊的和大於第三邊」。
- (2) 多數的學生往往只是察覺「最長邊的邊長加上最短邊的邊長大於次長邊的邊長」，或是「較短的兩個邊的邊長加起來大於最長邊的邊長」，對於所謂「任意兩邊的和」並未察覺。此時教師可以提醒學生將所有可能出現的組合加以驗證，以三個分別為「10 公分、6 公分、5 公分」的長度為例，這三個長度中最長為 10 公分，次長為 6 公分，最短為 5 公分，要判斷這三個長度能夠組成一個三角形，除了檢驗「最長邊的邊長加上最短邊的邊長大於次長邊的邊長」（即 $10+5>6$ ）以外，亦應對於「較短的兩個邊的邊長加起來大於最長邊的邊長」（即 $6+$

5>10) 的部分進行檢驗，當能做出更為正確的判斷。

- (3) 建議教師指導學生探討完「三角形任意兩邊的和大於第三邊」的性質後，製作學習單一張，內容至少包含正三角形，等腰三角形，直角三角形及數個任意三角形。學生其實已經學過小數的加法，老師可以要求學生實際測量每一個三角形三個邊的長度，測量的長度可以只取到小數第一位，然後寫出算式驗證。例如：量出的長度為 5.5 公分、4 公分、2.6 公分，此時應要求學生寫出三個檢驗的式子：

$$\begin{cases} 5.5+4>2.6 \\ 4+2.6>5.5 \\ 2.6+5.5>4 \end{cases}$$

學生對於「三角形任意兩邊的和大於第三邊」的性質將會更為深入了解。

(四) 本題教學的加強重點

建議教師可以參考下列步驟協助學生解題：

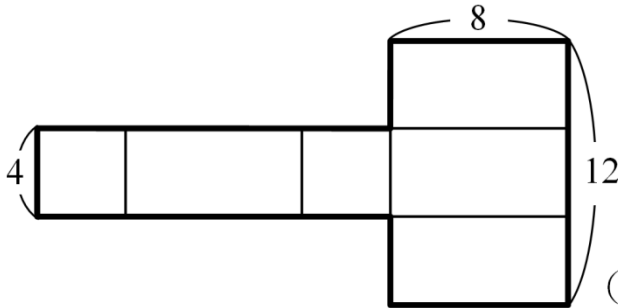
步驟1：先複習「三角形任意兩邊的和大於第三邊」的性質。

步驟2：檢查題目中給定的二個邊長，因為 $13+5=18$ ，並未大於 19 公分，所④不符合。

步驟3：檢查①：6 公分，因為 $6+5=11$ ，並未大於 13 公分所以①不符合。

步驟4：檢查②：8 公分，因為 $8+5=13$ ，並未大於 13 公分，所以②不符合。

第 11 題

知識向度	幾何	認知向度	程序執行																												
對應分年細目	5-s-07 能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。（同 5-n-20）																														
題目	<p>下圖為一個長方體的展開圖，這個長方體的體積是多少立方公分？</p> <div></div> <p>（單位：公分）</p> <p>① 128 立方公分 ② 160 立方公分 ③ 256 立方公分 ④ 384 立方公分</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：1</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.31</td><td>0.18</td><td>0.07</td><td>0.45</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.55</td><td>0.14</td><td>0.02</td><td>0.29</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.13</td><td>0.18</td><td>0.13</td><td>0.55</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：1	選項率	0.31	0.18	0.07	0.45	0.00		高分組	0.55	0.14	0.02	0.29	0.00		低分組	0.13	0.18	0.13	0.55	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：1																									
選項率	0.31	0.18	0.07	0.45	0.00																										
高分組	0.55	0.14	0.02	0.29	0.00																										
低分組	0.13	0.18	0.13	0.55	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.42，通過率為 0.31，試題難易度 0.34。

(二) 評量目標說明

本題是長方體的體積的問題，要求學生了解長方體的構成要素，能由長方體的展開圖判別出長方體的長、寬、高，以求出長方體的體積。

(三) 選項表現說明

- 有 31% 的學生選擇正確選項①，顯示約 3 成的學生已經能從展開圖找出長方體的長、寬、高，並能利用「長方體體積＝長×寬×高」的公式計算出長方體的體積。學生先從展開圖找出長、寬、高三種邊，長度分別為 4 公分、

4 公分、8 公分。接著算出長方體的體積，有兩種方法，方法一是把邊長 4 公分的正方形當成底面，底面積是 4×4 ，然後再乘上高是 8 公分，就可以算出長方體的體積 $4 \times 4 \times 8 = 16 \times 8 = 128$ （立方公分）；方法二是把長方形的面當成底面，底面積是 8×4 ，然後再乘上高是 4 公分，就可以算出長方體的體積 $8 \times 4 \times 4 = 32 \times 4 = 128$ （立方公分）。

2. 有 45% 的學生選擇④，這些學生可能直接用圖示上的 3 個數字相乘。而把 $8 \times 4 \times 12 = 384$ （立方公分）當成答案。
3. 有 18% 的學生選擇②，這些學生可能直接算成長方體的表面積，而 $8 \times 4 \times 4 + 4 \times 4 \times 2 = 128 + 32 = 160$ （立方公分）當成答案。
4. 有 7% 的學生選擇③，這些學生可能理解錯誤，找錯長、寬、高的邊長。而把 $8 \times 4 \times 8 = 32 \times 8 = 256$ （立方公分）當成答案。

（四）學生表現說明

1. 本題的命題設計為主要希望了解學生，對於「由長方體的展開圖來判斷長方體的長、寬、高」以及「長方體體積的計算」這兩個概念是否完全清楚。因此，在題目中特別給一線段長為 12 公分，其中包含了已知的 4 公分及兩小段等長的邊。所以學生須算出未標示的一個邊，長度也是 4 公分。再利用長方體的三種邊長：4 公分、4 公分、8 公分，進行長方體體積＝長×寬×高的計算。藉以了解學生是否知道何謂長方體的體積而非長方體的表面積。
2. 本題難易度為 0.34。有約 3 成的學生能清楚從長方體的展開圖判別出長方體的長、寬、高，並能計算出長方體的體積，但仍有 7 成多的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，55% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 13% 回答正確，有 87% 的低分組學生可能無法同時判別「構成長方體三種邊的長度」和知道「長方體體積的計算方式」，而選擇錯誤的選項。其中低分組又有 55% 的學生選擇的答案是展開圖上三數相乘的結果，完全不清楚這三數和題目所要求的長方體的體積有何關係。低分組有 18% 的學生選擇②，有 13% 的學生選擇③，顯示學生對於構成長方體的三種邊長和長方體體積、表面積之間的關係並未充分掌握住。平日教學應加強從長方體展開圖辨識出長方體長、寬、高的能力，以及長方體表面積與體積差異的概念。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

（一）評量重點

5-s-07 能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。（同 5-n-20）

（二）先備的知識

1. 4-n-18 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。（同 4-s-09）
2. 4-n-19 能認識體積及體積單位「立方公分」。

(三) 延伸的知識

6-n-15 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。(同 6-s-05)

十二年國教課綱（學習內容）（草案，送部版）

(一) 評量重點

S-5-5 正方體和長方體：計算正方體和長方體的體積與表面積。正方體與長方體的體積公式。

(二) 先備的知識

S-4-3 正方形與長方形的面積與周長：理解邊長與周長或面積的關係，並能理解其公式與應用。簡單複合圖形。

(三) 延伸的知識

S-6-4 柱體體積與表面積：含角柱和圓柱。利用簡單柱體，理解「柱體體積＝底面積×高」的公式。簡單複合形體體積。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

認識長方體的體積公式＝長×寬×高。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

混淆長方體的體積與表面積的概念

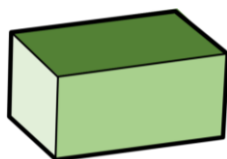
- (1) 長方體的體積與表面積意義不同：物體的體積指的是物質或物體所占空間的大小或佔據一特定容積的物質的量，體積是立體堆疊而成的。表面積是指一立體圖形所有表面的面積之和，用平面紙做出所需要的紙張面積總和。
- (2) 長方體的體積公式與表面積公式不同：1 個長方體的體積是有幾層、每一層有幾排、每一排有幾個 1 立方公分的方式計算體積。而長方體的表面積是長方體 6 個表面的面積總和，6 個表面總共可以分成 3 組不同的面，分別是長與寬組成、長與高組成、寬與高組成，每組有 2 個相同的面。所以長方體的表面積公式是「 $(長 \times 寬 + 長 \times 高 + 寬 \times 高) \times 2$ 」
- (3) 長方體的體積與表面積的單位不同：長方體的體積是多少個 1 立方公分小正方體堆疊而成，單位是多少立方公分或是多少立方公尺。表面積是多少個 1 平方公分或平方公尺鋪排而成。明顯的體積與表面積單位不同。

(三) 核心概念的教學重點

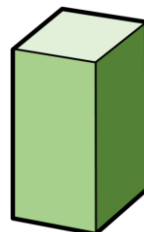
1. 長方體表面積和體積的區別

- (1) 表面積的比較：「一個長 7 公分、寬 4 公分、高 3 公分的長方體，當把這個長方體擺放成【圖 11-1】時，表面積的總和，會與擺放成【圖

11-2】時表面積的總和一樣嗎？為什麼？」



【圖 11-1】



【圖 11-2】

【圖 11-1】和【圖 11-2】都是同一個長方體，構成的 6 個表面是相同的，所以這兩個長方體不管如何擺放，表面積相同。

- (2) **體積的比較：**「甲便當盒長 15 公分、寬 8 公分、高 4 公分，乙便當盒長 10 公分、寬 13 公分、高是 4 公分，請問哪一個便當盒裡可以裝比較多的白飯？為什麼？」這兩個便當盒佔有的空間是體積問題。所以可以用體積（此處的體積等於內體積）來比較哪個便當盒可以裝的比較多。甲便當盒的體積是 $15 \times 8 \times 4 = 480$ 立方公分，乙便盒的體積是 $10 \times 4 \times 13 = 520$ 立方公分。

2. 長方體表面積和體積的教學

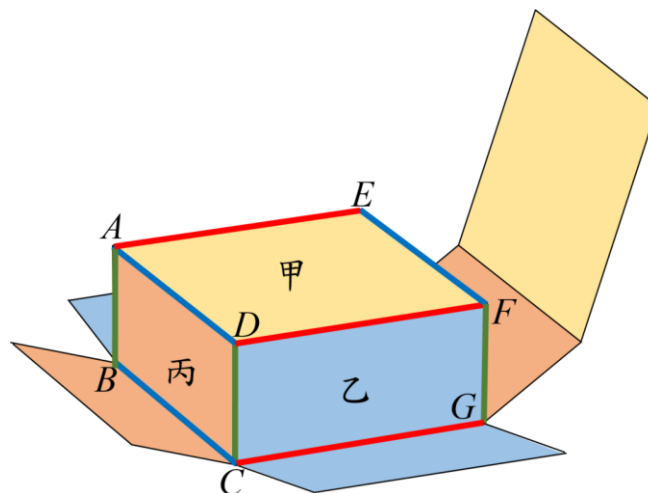
- (1) **表面積的教學：**在進行長方體的表面積教學時，學生先找一個小型的盒子，老師再給學生一張 A4 的方格紙，讓學生將紙盒每個面畫在方格紙上。接著學生再剪下這六個面，在平面上將紙盒的六個面組合起來，要能回復成原來紙盒的立體形體。透過這個活動讓學生體驗到這六個面是平面的，也是盒子的表面，所以這六個面就是立體紙盒的表面積，因為六個面是平面組合的，所以表面積的大小是六個面的面積總和。
- (2) **體積的教學：**在進行長方體的體積教學時，學生先找一個小型的盒子，老師可以給學生 100 個 1 立方公分的小積木，讓學生嘗試利用小積木堆疊一個和立體盒子一樣大小的，讓學生體驗體積是一個個立方積木堆疊而成的，所以是以立方公分為單位，是體積是立體的，非平面的。

透過兩種教學活動讓學生清楚辨別體積和表面積的不同。表面積是平面圖形的組合，是物體外表的面積總和，常用的單位是平方公分；體積是立體堆疊的結果，是佔有空間有長、寬、高三維空間，常用的單位是立方公分。

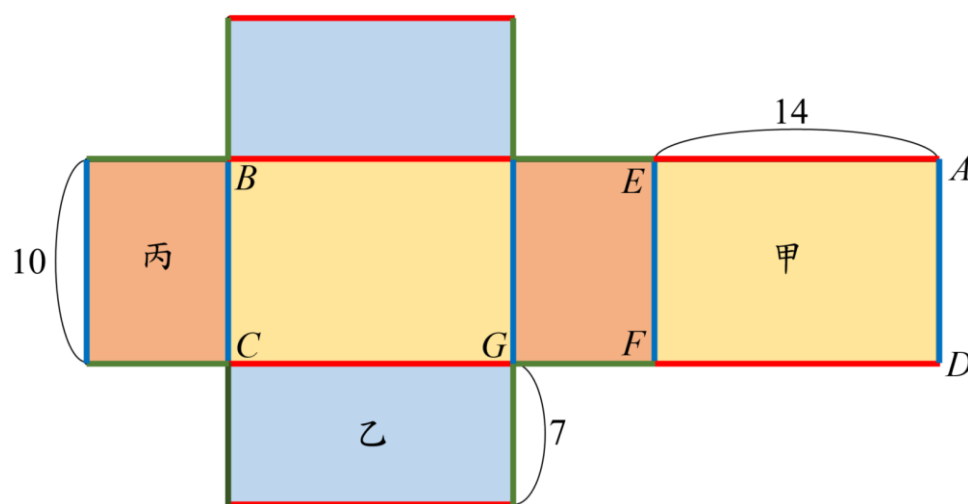
3. 利用長方體的構成要素長、寬、高，3 種邊長，算出長方體的體積與表面積

- (1) 從【圖 11-3】，我們可以看到長方體的長、寬、高三種邊長。
 長：邊 AE 、邊 DF 、邊 CG ；
 寬：邊 AD 、邊 EF 、邊 BC ；
 高：邊 AB 、邊 DC 、邊 FG 。
- (2) 從【圖 11-3】知這個展開圖可以變成一個長方體，展開圖【圖 11-4】找出長方體的長、寬、高，從圖上可以得知長（紅色邊如邊 AE ）為 14 公分、寬（藍色邊如邊 BC ）是 10 公分、高（綠色邊如邊 FG ）是

7 公分。



【圖 11-3】



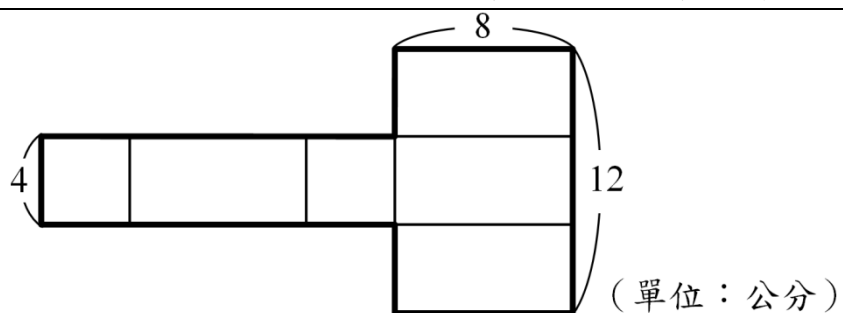
【圖 11-4】

- (3) 組成長方體表面積的甲、乙、丙三種面，分別為甲是 10 公分和 14 公分，乙是 7 公分和 14 公分，丙是 10 公分和 7 公分組成，每種面有 2 個，所以可以知道長方體表面 6 個面的總和是

$$\begin{aligned} & (10 \times 7 + 7 \times 14 + 10 \times 14) \times 2 \\ &= (70 + 98 + 140) \times 2 \\ &= 308 \times 2 = 616 \text{ (平方公分)}。 \end{aligned}$$

- (4) 長方體的體積是由有幾層，一層有幾排，一排有幾個 1 立方公分積木堆疊而成。所以可以知道這個長方體一排有 14 個 1 立方公分，一層有 10 排，一層有 140 個 1 立方公分，總共有 7 層，所以是 $140 \times 7 = 980$ 個 1 立方公分，所以是 980 立方公分。

(四) 本題教學的加強重點



【圖 11-5】

1. 從展開圖【圖 11-5】找出長方體的長、寬、高，從上圖可以得知一組邊長為 4 公分，一組邊長為 8 公分，第三組邊隱藏在 12 公分裡。12 公分中包含一段 4 公分及兩段未知等長的邊。所以我們可以算出 $(12 - 4) \div 2 = 4$ ，可以得知第三組邊長為 4 公分。
2. 組成長方體的表面積有三種面，其邊長分別為 8 公分和 4 公分、4 公分和 4 公分、8 公分和 4 公分的長方形，每種面有 2 個，所以可以知道長方體表面積的 6 個面總和是

$$\begin{aligned}
 & (8 \times 4 + 8 \times 4 + 4 \times 4) \times 2 \\
 &= (32 + 32 + 16) \times 2 \\
 &= 80 \times 2 \\
 &= 160 \text{ (平方公分)}。
 \end{aligned}$$

3. 長方體的體積是由有幾層，一層有幾排，一排有幾個 1 立方公分積木堆疊而成。所以可以知道這個長方體一排有 4 個 1 立方公分，一層有 8 排，一層有 32 個 1 立方公分，總共有 4 層，所以是 $32 \times 4 = 128$ 個 1 立方公分，所以是 128 立方公分。

第 12 題

知識向度	量與實測	認知向度	程序執行																												
對應分年細目	5-n-16 能認識重量單位「公噸」、「公噸」及「公斤」間的關係，並做相關計算。																														
題目	一隻大象重 5.7 公噸、一隻小象重 3 公噸 5 公斤，大象和小象的體重相差多少？（1 公噸＝1000 公斤） ① 2 公噸 695 公斤 ② 2 公噸 2 公斤 ③ 2.65 公噸 ④ 2.2 公噸																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：1</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.68</td><td>0.13</td><td>0.05</td><td>0.13</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.94</td><td>0.01</td><td>0.01</td><td>0.04</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.40</td><td>0.28</td><td>0.11</td><td>0.21</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：1	選項率	0.68	0.13	0.05	0.13	0.00		高分組	0.94	0.01	0.01	0.04	0.00		低分組	0.40	0.28	0.11	0.21	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：1																									
選項率	0.68	0.13	0.05	0.13	0.00																										
高分組	0.94	0.01	0.01	0.04	0.00																										
低分組	0.40	0.28	0.11	0.21	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.54，通過率為 0.68，試題難易度 0.67。

(二) 評量目標說明

本題是測驗學生是否了解重量單位「公噸」及「公斤」間的單位換算以及減法計算，要求學生能經由重量單位的換算，再進行重量的計算。

(三) 選項表現說明

- 有 68% 的學生選擇正確選項①，顯示約近七成的學生已經掌握重量單位「公噸」及「公斤」間的單位換算及減法計算能力。能算出 3 公噸 5 公斤＝3.005 公噸， $5.7 - 3.005 = 2.695$ 公噸＝2 公噸 695 公斤。
- 有 13% 的學生選擇②，這些學生可能將 5.7 公噸視為 5 公噸 7 公斤，將兩數相減，5 公噸 7 公斤－3 公噸 5 公斤＝2 公噸 2 公斤，而把 2 公噸 2 公斤當作答案。
- 有 13% 的學生選擇④，這些學生可能誤認為 3 公噸 5 公斤＝3.5 公噸，而將本題計算為 $5.7 - 3.5 = 2.2$ 公噸。
- 有 5% 的學生選擇③，這些學生可能誤認為 3 公噸 5 公斤＝3.05 公噸，而將

$5.7 - 3.05 = 2.65$ 公噸當成答案。

(四) 學生表現說明

1. 本題命題設計為了解學生是否能進行重量複名數的減法計算。學生可以先將公噸（5.7 公噸）換算為重量的複名數（5 公噸 700 公斤），或是將重量的複名數（3 公噸 5 公斤）換算為重量的單名數（3.005 公噸），最後再以重量減法算出相差的重量，算出的答案即為本題答案。
2. 本題難易度為 0.67。有將近 7 成的學生能知道「公噸」及「公斤」間的關係並進行重量單位的計算，但仍有 3 成多的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，94% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 40% 回答正確，有 60% 的低分組學生未能了解「公噸」及「公斤」間的關係，選擇其他的選項。低分組各有 2 成多的學生選擇②和④，顯示學生對於重量單位的化聚並未充分掌握，認為學生對於重量單位小數倍複名數化聚（5.7 公噸＝5 公噸 700 公斤）或重量單位整數倍單名數化聚（3 公噸 5 公斤＝3.005 公噸）尚未能清楚掌握，因此進行重量計算時無法算出正確答案。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-16 能認識重量單位「公噸」、「公噸」及「公斤」間的關係，並做相關計算。

(二) 先備的知識

1. 3-n-16 能認識重量單位「公斤」、「公克」及其關係，並做相關的實測、估測與計算。
2. 4-n-14 能以複名數解決量（長度、容量、重量）的計算問題。

(三) 延伸的知識

6-n-11 能理解常用導出量單位的記法，並解決生活中的問題。

十二年國教課綱（學習內容）（草案，送部版）

(一) 評量重點

N-5-13 重量：「公噸」。生活實例之應用。含與「公斤」的換算與計算。使用概數。

(二) 先備的知識

N-3-16 重量：「公斤」、「公克」。實測、量感、估測與計算。單位換算。

(三) 延伸的知識

N-6-8 解題：基準量與比較量。比和比值的應用。含交換基準時之關係。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

用公噸和公斤的重量單位做加、減、乘、除的計算。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 重量單位「公噸」、「公噸」及「公斤」間的關係

(1) 不理解重量單位小數倍單名數化聚：大單位化成小單位：學生不理解 5.7 公噸是多少公斤。

(2) 不理解重量單位小數倍複名數化聚

甲、大單位化成小單位：學生不理解 5.7 公噸是多少公噸多少公斤。

乙、小單位聚成大單位：學生不理解 3 公噸 5 公斤是多少公噸。

(3) 不理解重量單位整數倍複名數化聚—大單位化成小單位：學生不理解 3 公噸 5 公斤是多少公斤。

2. 相關的計算

(1) 加減法時，容易沒有注意到 1 公噸=1000 公斤，而造成計算錯誤。
例如 5.1 公噸—3 公噸 2 公斤，誤計算成 $5.1-3.2=1.9$ 公噸。或是計算成 $5.1-3.02=2.08$ 公噸。

(2) 乘除法時，容易沒有注意到 1 公噸=1000 公斤，而造成計算錯誤。
例如 $5.08 \text{ 公噸} \times 2 = (\quad)$ 公噸，誤計算成 11.6 公噸。

(三) 核心概念的教學重點

1. 學生必須先建立 1 公噸等於 1000 公斤的起始概念。並學會繪製運用重量定位板：

公噸			公斤
1	0	0	0

2. 教師首先讓學生練習填寫 1000 公斤以內的數於重量定位板上。

(1) 讓學生練習填寫 1 公噸、2 公噸、3 公噸、……，等於多少公斤的數於重量定位板上。

(2) 學生精熟練習填寫 1234 公斤類型、1230 公斤類型、1200 公斤類型、1034 公斤類型、1030 公斤類型等於多少噸多少公斤？（由簡到難）。

(3) 讓學生精熟練習填寫二階單位化聚，例如：「1 公噸 234 公斤類型」、「1 噸 230 公斤類型」、「1 公噸 200 公斤類型」、「1 公噸 34 公斤類型」、……，各會等於多少公斤？

3. 重量定位板「小數」之應用：例如 3245 公斤 = 3.245 公噸。

公噸			公斤
千位	百位	十位	個位
3	2	4	5

公噸			
3	2	4	5

4. 重量的計算問題

(1) **重量加法和減法問題：**重量單位化聚完後，利用重量單位定位版進行加減法直式計算。

(2) **重量乘法問題：**可以把問題當作小數乘以整數的計算。

$$1.5 \text{ (公噸)} \times 2000 = (\quad)。$$

1.5 的 1000 倍是小數點往右移三位，所以是 1500。2000 倍是 1000 倍的 2 倍，所以 $1.5 \times 2000 = 1500 \times 2 = 3000$ ，所以是 3000 公噸。

$$\begin{array}{r} 1.5 \\ \times 2000 \\ \hline 3000 \end{array}$$

(3) **重量除法問題**

甲、 題目： $1.5 \text{ (公噸)} \div 25 = (\quad) \text{ (公斤)}。$

方法1：先把大單位化作小單位，也就是把 1.5 化成是 1500 公斤。再利用整數除法完成計算。

$$1500 \div 25 = (\quad)。$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ 25 \overline{)1500} \\ \underline{1500} \\ 0 \end{array}$$

方法2：解法 2： $1.5 \div 25 = 0.06 \text{ 公噸} = 60 \text{ 公斤}。$

$$\begin{array}{r} 0.06 \\ 25 \overline{)1.5} \\ \underline{150} \\ 0 \end{array}$$

乙、 題目： $1.6 \text{ 公噸} \div 200 \text{ 公斤} = (\quad)。$

方法1：先把大單位化作小單位，1.6 公噸化成是 1600 公斤，再利用整數除法完成計算。 $1600 \div 200 = 8。$

方法2：直接利用小數除法概念計算。

$$200 \text{ 公斤} = 0.2 \text{ 公噸}, 1.6 \text{ 公噸} \div 200 \text{ 公斤} = (8)。$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 0.2 \overline{)1.600} \\ \underline{1600} \\ 0 \end{array}$$

(4) 重量的乘法和除法問題：

利用乘法解決大單位化為小單位的問題，利用除法解決小單位聚為大單位的問題。

題目：3 公噸＝（ ）公斤。

解題：「1 公噸是 1000 公斤，3 公噸是多少公斤？」教師可以幫助學生利用算式「 $1000 \times 3 = 3000$ 」，算出 3 公噸是 3000 公斤。

題目：4.6 公噸＝（ ）公斤。

解題：「1 公噸是 1000 公斤，0.6 公噸是多少公斤？」教師幫助學生利用算式「 $0.6 = \frac{6}{10}$ ， $1000 \div 10 = 100$ ， $100 \times 6 = 600$ 」，算出 0.6 公噸是 600 公斤。4 公噸＝ $1000 \times 4 = 4000$ 公斤， $4000 + 600 = 4600$ 公斤。

題目：5000 公斤＝（ ）公噸。

解題：「1 公噸是 1000 公斤，5000 公斤是多少公噸？」教師幫助學生利用算式「 $5000 \div 1000 = 5$ 」，算出 5000 公斤可以換 5 公噸。

題目：5.89 公噸相當於幾公噸幾公斤？

解題：5.89 公噸＝5 公噸＋0.89 公噸，其中 0.89 公噸＝ $1000 \text{ 公斤} \times 0.89 = 890$ 公斤，所以 5.89 公噸＝5 公噸 890 公斤。

(四) 本題教學的加強重點

1. 重量單位小數倍複名數化聚

(1) 大單位化成小單位

方法1：5.7 公噸＝5 公噸＋0.7 公噸，其中 0.7 公噸是 1 公噸的 0.7 倍，1 公噸是 1000 公斤，所以 0.7 公噸＝ $1000 \times 0.7 = 700$ 公斤。5.7 公噸也就是 5 公噸 700 公斤。

方法2：5.7 公噸＝5 公噸＋0.7 公噸，1 公噸是 1000 公斤，將 0.7 記成 $\frac{7}{10}$ ，再利用算式「 $1000 \div 10 = 100$ ， $100 \times 7 = 700$ 」，算出 0.7 公噸和 700 公斤一樣重，所以 5.7 公噸是 5 公噸 700 公斤。

(2) 小單位化成大單位

方法1：以 3 公噸 5 公斤為例，1 公噸是 1000 公斤，5 公斤是 1000 公斤的 0.005 倍（ $5 \div 1000 = 0.005$ ），1 公噸的 0.005 倍是 0.005 公噸。所以 3 公噸 5 公斤是 3 公噸＋0.005 公噸＝3.005 公噸。

方法2：以3公噸5公斤為例，有5公斤，每1000公斤是1公噸，
 用算式「 $5 \div 1000 = \frac{5}{1000} = 0.005$ 」，算出5公斤和0.005公噸一樣重，所以3公噸和0.005公噸合起來是3.005公噸。

2. 重量定位板「小數」之應用

學生必須先建立1公噸等於1000公斤的起始概念。並學會繪製重量定位板（如下表）的能力。

初階版：

公噸			公斤
千位	百位	十位	個位

進階版：

公噸			

步驟1：教師首先讓學生練習填寫1000公斤以內的數於重量定位板上。
 例如：

公噸			公斤
千位	百位	十位	個位
	9	0	7

公噸			
0	9	0	7

步驟2：讓學生練習填寫1公噸、2公噸、3公噸、……，等於多少公噸的數於重量定位板上。例如：

公噸			公斤
千位	百位	十位	個位
3	0	0	0

公噸			
3	0	0	0

步驟3：學生精熟練習填寫3公噸500公斤、3公噸50公斤、3公噸5公斤是多少公噸？例如：

公噸			公斤
千位	百位	十位	個位
3	0	0	5

公噸			
3	0	0	5

步驟4：學生精熟練習反推5.7公噸是多少公噸多少公斤。例如：

公噸			公斤
千位	百位	十位	個位
5	7	0	0

公噸			
5	7	0	0

3. 重量單位的減法計算

- (1) 小數倍複名數化聚，利用大單位化成小單位後再計算：先將 5.7 公噸換成是 5 公噸 700 公斤後，再將 5 公噸 700 公斤和 3 公噸 5 公斤中公噸和公斤數字位置對齊重量定位板，算出答案 2 公噸 695 公斤。

公噸			公斤
5	7	0	0
— 3	0	0	5
2	6	9	5

- (2) 小數倍複名數化聚，利用小單位聚成大單位後再計算：先將 3 公噸 5 公斤換成是 3.005 公噸後，再將 5.7 公噸和 3.005 公噸的數字位置對齊重量定位板，算出答案為 2.695 公噸。

公噸			
個位	十分位	百分位	千分位
5	7	0	0
— 3	0	0	5
2	6	9	5

第 13 題

知識向度	量與實測	認知向度	程序執行																												
對應分年細目	5-n-15 能解決時間的乘除計算問題。																														
題目	<p>齊柏林導演拍攝的電影「看見台灣」片長 1 小時 33 分鐘，若電影院從上午 9 時 30 分開始，連續播放這部電影 4 遍，播完時是下午幾時幾分？</p> <p>① 下午 3 時 2 分 ② 下午 3 時 42 分 ③ 下午 5 時 2 分 ④ 下午 6 時 12 分</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：2</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.15</td><td>0.65</td><td>0.09</td><td>0.12</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.06</td><td>0.90</td><td>0.01</td><td>0.03</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.22</td><td>0.39</td><td>0.18</td><td>0.21</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.15	0.65	0.09	0.12	0.00		高分組	0.06	0.90	0.01	0.03	0.00		低分組	0.22	0.39	0.18	0.21	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																									
選項率	0.15	0.65	0.09	0.12	0.00																										
高分組	0.06	0.90	0.01	0.03	0.00																										
低分組	0.22	0.39	0.18	0.21	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.51，通過率為 0.65，試題難易度 0.64。

(二) 評量目標說明

本題是時間的乘以及加法計算問題，要求學生能由進行時間乘法計算找出時間總量，再以時間加法計算出時刻，並以 12 小時制算出正確答案。

(三) 選項表現說明

- 有 65% 的學生選擇正確選項②，顯示約七成的學生已經掌握解決時間乘法問題的能力，並利用 1 時是 60 分進行時分換算後再進行時間的加法計算。能正確算出 9 時 30 分 + 1 小時 33 分 $\times 4 = 9$ 時 30 分 + 6 時 12 分 = 15 時 42 分 = 下午 3 時 42 分。
- 有 15% 的學生選擇①，這些學生可能誤以為 1 小時是 100 分，將 1 小時 33 分 $\times 4 = 4$ 時 132 分，當成是 5 時 32 分。最後將 9 時 30 分 + 5 時 32 分 = 14 時 62 分 = 15 時 2 分 = 下午 3 時 2 分，將下午 3 時 2 分當成正確答案。
- 有 12% 的學生選擇④，這些學生可能直接把 1 小時 33 分 $\times 4 = 6$ 時 12 分誘

答當成是正確答案，而忘記加上原本電影開始撥放的時間，將下午 6 時 12 分當成正確答案。

4. 有 9% 的學生選擇③，這些學生在計算 1 小時 33 分 $\times 4=4$ 時 132 分時，誤把 132 分當成 13 時 2 分，所以誤記為 17 時 2 分，而 17 時 2 分也就是下午 5 時 2 分，將下午 5 時 2 分當成正確答案。

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc} \text{時} & \text{分} \end{array} \\
 & 1 & 33 \\
 \times & & 4 \\
 \hline
 & 4 & 132 \\
 + & 13 & 2 \\
 \hline
 & 17 & 2 \\
 \text{下午} & 5 & 2
 \end{array}$$

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計為主要希望了解學生對於「1 小時是 60 分鐘」以及「○時是下午○時」，此一概念是否完全清楚。因此，在題目中特別讓時間的乘法分的部分大於 100，學生能將 $132 \div 60 = 2$ 時 12 分，最後再將時間總量與開始的時刻進行加法計算，完成時間的問題。
2. 本題難易度為 0.64。雖然通過率 65%，顯示有將近 7 成的學生能以時間乘法算出時間總量，再利用時刻加時間總量是某個時刻的方法，正確解答本題。但仍有 3 成多的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，90% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 39% 回答正確。選擇錯誤選項的學生可能雖能進行時間乘法的計算，但不具備 1 時=60 分換算的概念，無法進行時、分的時間單位換算，分別將 1 時=10 分或 100 分進行換算，而後再進行時間的加法計算，把錯誤的時刻當作本題答案。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-15 能解決時間的乘除計算問題。

(二) 先備的知識

1. 3-n-13 能認識時間單位「日」、「時」、「分」、「秒」及其間的關係，並做同單位時間量及時、分複名數的加減計算（不進、退位）。
2. 4-n-13 能解決複名數的時間量的計算問題。

(三) 延伸的知識

6-n-12 能認識速度的意義及其常用單位。

十二年國教課綱（學習內容）（草案，送部版）

(一) 評量重點

N-5-16 **解題**：時間的乘除問題。在分數和小數學習的範圍內，解決與時間相關的乘除問題。

(二) 先備的知識

1. N-3-17 **時間**：「日」、「時」、「分」、「秒」。實測、量感、估測與計算。時間單位的換算。認識時間加減問題的類型。
2. N-4-13 **解題**：日常生活的時間加減問題。跨時、跨午、跨日、24 小時制。含時間單位換算。

(三) 延伸的知識

N-6-7 **解題**：速度：比和比值的應用。速度的意義。能做單位換算（大單位到小單位）。含不同時間區段的平均速度。含「距離＝速度×時間」公式。用比例思考協助解題。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

進行日、時、分、秒相鄰二階單位的複名數時間量乘法計算。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. **將時刻和時間（量）的混淆**：有關於某一時刻經過多少時間（量）會到哪一個時刻，或兩個時刻間經過多少時間（量）的計算問題，是學童學習困難的教材。學生對「上午 8 時 20 分到下午 1 時 30 分，共經過多少時間？」缺乏概念，容易把這 2 個時刻相加，8 時 20 分＋1 時 30 分，表示學生對於時間與時刻的觀念不清，所以才會將「共經過多少時間」想成 2 個時刻的相加，也就是「幾時幾分」＋「幾時幾分」的計算。

2. 時間的乘法問題

(1) 把時間單位換算當成是百進位。

$$\begin{array}{r}
 \text{時} \quad \text{分} \\
 1 \quad 33 \\
 \times \quad 4 \\
 \hline
 4 \quad 132 \\
 + \quad 13 \quad 2 \\
 \hline
 17 \quad 2 \\
 \text{下午} \quad 5 \quad 2
 \end{array}
 \rightarrow \text{把 132 分當成 1 小時 32 分}$$

(2) 把時間單位換算當成是十進位。

$$\begin{array}{r}
 \text{時} \quad \text{分} \\
 1 \quad 33 \\
 \times \quad 4 \\
 \hline
 4 \quad 132
 \end{array}
 \rightarrow \text{把 132 分當成 13 小時 2 分}$$

3. 時間的除法問題

(1) 把時間單位換算當成是百進位：連續二階複名數等分除。

$$\begin{array}{r}
 \text{時} \quad \text{分} \\
 2 \quad 30 \\
 4 \overline{) 9 \quad 20} \\
 \underline{8} \\
 1 \quad 20 \\
 \underline{1} \quad 20 \\
 0
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \rightarrow \text{把 1 時 20 分當成 120 分} \\
 \text{所以認為 } 120 \text{ 分} \div 4 = 30 \text{ 分}
 \end{array}$$

(2) 把時間單位換算當成是十進位：連續二階複名數等分除。

$$\begin{array}{r}
 \text{時} \quad \text{分} \\
 1 \quad 3 \\
 8 \overline{) 10 \quad 8} \\
 \underline{8} \\
 2 \quad 8 \\
 \underline{2} \quad 4 \\
 4
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \rightarrow \text{把 2 時 8 分當成 28 分} \\
 \text{所以認為 } 28 \text{ 分} \div 8 = 3 \cdots 4
 \end{array}$$

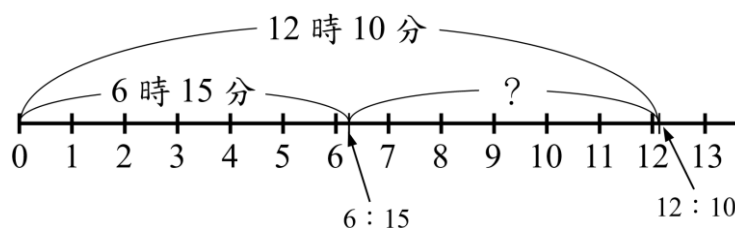
(3) 把時間單位換算當成是百進位：連續二階複名數包含除。

9 時 4 分 \div 2 時 26 分 = ()，學生把 2 時 26 分當成 226 分，把以為 9 時 4 分當成 904 分，誤計算成 $904 \div 226 = 4$ 。

(三) 核心概念的教學重點

1. 時刻和時間（量）的計算問題（配合時間線段圖進行解題）

學童可以在時間直線上標示某時刻，並能瞭解該時刻和表示從 9 時間開始到時刻所經過的時間量的不同，可讓學童將問題利用算式填充題呈現，再配合時間數線說明。例如：6 時 15 分到 12 時 10 分經過多少時間？學生在以 1 小時為單位的時間數線上將問題標示出來，如【圖 13-1】：



【圖 13-1】

再記成算式填充題：

A 型：12 時 10 分 $-$ 6 時 15 分 = () 時 () 分。

B 型：6 時 15 分 + () 時 () 分 = 12 時 10 分。

C 型：12 時 10 分 $-$ () 時 () 分 = 6 時 15 分。

學童就時間數線的說明，可能有兩類：一類是「位置經過位移到新位置」的向量觀點，即某時刻加（減）時間量是某某時刻（對應 B、C 型，也可配合點算），或二時刻相差一個時間量（對應 A 型）的說法。一類是「時間量加減」的計算觀點，即將時刻換成從 0 時間量，對兩個時間量作加法運算（對應 B 型）或減法運算（對應 A、C 型）的說法。

2. 時間的乘除計算

(1) 時間的乘法計算

題目：1 時 15 分 $\times 6 =$ () 時 () 分。

解題：1 時 $\times 6 = 6$ 時，15 分 $\times 6 = 90$ 分 $= 1$ 時 30 分，
6 時 $+ 1$ 時 30 分 $= 7$ 時 30 分。

(2) 時間的除法計算

連續二階複名數等分除問題，需先化為低階單位再計算。例如：9 時 20 分 $\div 4 = ?$ 應是 60 分 $\times 9 + 20$ 分 $= 560$ 分，560 分 $\div 4 = 140$ 分，140 分 $= 2$ 時 20 分，連續二階複名數包含除的問題，應避免出現被除數和除數的「時和時」、「分 and 分」成比例關係的題型，而進行直接進行除法計算，如直式「8 時 12 分 $\div 2$ 時 3 分 $=$ ()」，小朋友可能當作 $812 \div 203 = 4$ ，而碰巧以錯誤方式得到正確答案，如同前例。

正確計算應直接將時間化為低階單位再計算。也就是將 8 時 12 分換成是 $60 \times 8 + 12$ ，是 492 分，2 時 3 分換成是 $60 \times 2 + 3$ ，是 123 分，所以 $492 \div 123 = 4$ 。

(四) 本題教學的加強重點

1. 時和分的化聚及記錄

- (1) 解決時間單位由「分」聚成「時」的問題：先以時間為某（60 的整數倍）分鐘是幾小時的問題，將以分鐘為單位的時間聚成以小時為單位的時間。例如 60 分是 1 小時，120 分是 2 小時，300 分是 5 小時。
- (2) 解決時間單位由「分」聚成「○（小）時○分（鐘）」的問題：已經知道 60 分是 1 小時，70 分鐘比 60 分鐘多了 10 分鐘，所以是 1 小時 10 分鐘。140 分鐘是 2 個 60 分鐘和 20 分鐘，所以是 2 小時 20 分鐘。
 $132 \div 60 = \boxed{2} \cdots \cdots \boxed{12} = 2$ 小時 12 分鐘。
- (3) 解決複名數「○（小）時○分（鐘）與○（小）時○分（鐘）」合成的問題：利用時間定位板，「時」對齊「時」、「分」對齊「分」的位置，若分超過 60 時，則將「分」聚成為「某時某分」再做加減法計算。

$\begin{array}{r} \text{時} \quad \text{分} \\ 4 \quad \quad \\ + \quad 2 \quad 12 \\ \hline 6 \quad 12 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{時} \quad \text{分} \\ 6 \quad 12 \\ + \quad 9 \quad 30 \\ \hline 15 \quad 42 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{時} \quad \text{分} \\ 6 \quad 12 \\ + \quad 4 \quad 50 \\ \hline 10 \quad 62 \\ 11 \quad 2 \end{array}$
--	--	--

- (4) 解決時間單位由「○（小）時○分（鐘）」化成「分」的問題：已經知道 60 分是 1 小時，若題目為 1 小時 10 分鐘，則是將 $1 \times 60 + 10 = 70$ 。當把 A（小）時 B 分（鐘）化成分的時候，可以將 $A \times 60 + B$ 就是答案。

2. 「時」和「分」的複名數乘法問題

- (1) 先算時，再算分：1 時 33 分 $\times 4 =$ () 時 () 分。

$1\text{ 時} \times 4 = 4\text{ 時}$ ， $33\text{ 分} \times 4 = 132\text{ 分}$ ， $132\text{ 分} = 2\text{ 時 } 12\text{ 分}$ ，
 $4\text{ 時} + 132\text{ 分} = 2\text{ 時 } 12\text{ 分} = 6\text{ 時 } 12\text{ 分}$ 。

- (2) **先算分，再算時：** $1\text{ 時 } 33\text{ 分} \times 4 = (\quad)\text{ 時 } (\quad)\text{ 分}$ 。
 $33\text{ 分} \times 4 = 132\text{ 分}$ ， $132\text{ 分} = 2\text{ 時 } 12\text{ 分}$ ， $1\text{ 時} \times 4 = 4\text{ 時}$ ，
 $4\text{ 時} + 2\text{ 時 } 12\text{ 分} = 6\text{ 時 } 12\text{ 分}$ 。

3. 「跨午」的題型

師：「從上午 9 時 30 分開始，1 小時後是幾時幾分？」

生：「10 時 30 分。」

師：「2 小時後是幾時幾分？」

生：「11 時 30 分。」

師：「3 小時後是幾時幾分？」

生：「12 時 30 分。」

師：「6 小時後是幾時幾分？」

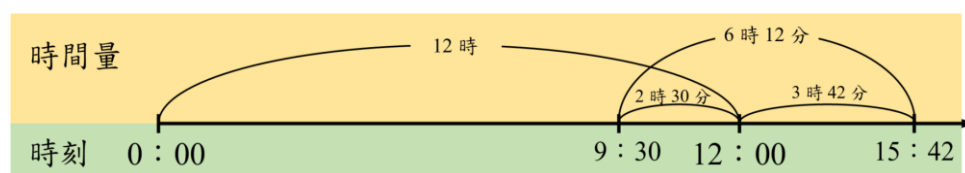
生：「15 時 30 分。」

師：「過 6 時 12 分後是幾時幾分？」

生：「15 時 42 分。」

師：「所以 15 時 42 分是從 9 時 30 分經過了 6 時 12 分，那 15 時 42 分又是下午幾時幾分呢？」

生：「15 時 42 分表示從 0 時開始，經過了 15 時 42 分。中午 12 時表示從 0 時開始，經過了 12 時， $15\text{ 時 } 42\text{ 分} - 12\text{ 時} = 3\text{ 時 } 42\text{ 分}$ ，如【圖 13-2】。因此過中午 12 時，到 15 時 42 分還有 3 時 42 分，故答案是下午 3 時 42 分。」



【圖 13-2】

(五) 其他

數學語言中的「時間量」和「時刻」：在數學語言中常會出現「○時○分」，但「○時○分」可能有兩種意義，一種代表的是**時刻**，也就是一個時間點，例如：上午 10 點 30 分、15 時 42 分或是下午 3 時 42 分。另一種代表的是**時間量**，也就是兩時刻間所經過的時間量，是時刻轉換為時間量後，才能進行相減的運算。

例如：【圖 13-2】中，上午 9 時 30 分到下午 3 時 42 分，中間經過 6 時 12 分，6 時 12 分就是一個時間量，我們也可以說是 6 小時 12 分鐘。但我們不會把時刻「15 時 42 分」或是「下午 3 時 42 分」說成「15 小時 42 分鐘」。

第 14 題

知識向度	量與實測	認知向度	解題思考																												
對應分年細目	5-n-21 能理解容量、容積和體積間的關係。																														
題目	在一個寬為 50 公分、長為 100 公分的長方體水族箱中，將一個完全沉入水中的造景假山取出後，水族箱水位高度從 40 公分變成 38 公分，這座造景假山的體積是多少立方公分？ ① 10000 立方公分 ② 190000 立方公分 ③ 199962 立方公分 ④ 200000 立方公分																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：1</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.74</td><td>0.11</td><td>0.06</td><td>0.09</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.97</td><td>0.02</td><td>0.00</td><td>0.01</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.47</td><td>0.22</td><td>0.14</td><td>0.17</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：1	選項率	0.74	0.11	0.06	0.09	0.00		高分組	0.97	0.02	0.00	0.01	0.00		低分組	0.47	0.22	0.14	0.17	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：1																									
選項率	0.74	0.11	0.06	0.09	0.00																										
高分組	0.97	0.02	0.00	0.01	0.00																										
低分組	0.47	0.22	0.14	0.17	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.50，通過率為 0.74，試題難易度 0.72。

(二) 評量目標說明

本題檢測學生能否瞭解「容量、容積和體積間的關係」，學生必須能先了解放入容器中物體的體積與長方體水族箱水位增高後，上升的水的體積是一樣的，列出算式並正確計算出各步驟的結果，才能成功解題算出造景假山的體積。

(三) 選項表現說明

- 有 74% 的學生選擇正確選項①，顯示約 7 成的學生已經擁有「放入物體的體積與上升水的體積相等」的概念，可以算出上升水的體積是容器的長×寬×水位上升的高度（放入物體後的水高－放入物體前的水高），也就是 $50 \times 100 \times (40 - 38) = 10000$ 立方公分。
- 有 11% 的學生選擇②，這些學生可能只關心本題為體積題目，所以認定假山的體積是水位到 38 公分時直接將長方體的長×寬×水位高，三數相乘。而把 $50 \times 100 \times 38 = 190000$ 當成答案。

3. 有 9% 的學生選擇④，這些學生可能不懂題意，體積概念不清，只是把長方體的長、寬、高相乘，把 $50 \times 100 \times 40 = 200000$ 當作答案。
4. 有 6% 的學生選擇③，這些學生可能知道要先算出物體放下後水位升高多少再進行計算。列出算是 $50 \times 100 \times (40 - 38)$ ，但在計算時卻忽略括號，造成計算錯誤，把 $50 \times 100 \times 40 - 38 = 199962$ 當成答案。

(四) 學生表現說明

1. 本題命題的設計主要是希望了解學生是否已建立容量、容積和體積間的關係的概念，學生可以知道沉入水中物體的體積等於上升水的體積。學生能運用水位從 38 公分上升到 40 公分，水位上升 2 公分替換長方體體積公式「長方體體積＝長×寬×高」中的高，算出上升水的體積，並以此為答案計算放入水槽內部假山的體積，所以本體是基本題。
2. 本題難易度為 0.72。有 7 成多的學生能瞭解「容量、容積和體積間的關係」，學生了解放入容器中物體的體積與長方體水族箱水位增高後，上升水位的體積是一樣的，也就是知道「沉入水族箱中造景假山的體積」與「水族箱的底面積×水族箱水位增加的高度」是相等的。除此之外，學生能列出算式並正確計算出各步驟的結果，最後算出造景假山的體積。但仍有 2 成多的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，97% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 47% 的學生回答正確。選擇錯誤選項的學生可能雖能計算出長方體水族箱內水的體積，但不了解容量、容積和體積間的關係，或可能認為假山的體積等於「水族箱內原有水的體積」或是「放入假山後的總體積」。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-21 能理解容量、容積和體積間的關係。

(二) 先備的知識

1. 3-n-15 能認識容量單位「公升」、「毫公升」（簡稱「毫升」）及其關係，並做相關的實測、估測與計算。
2. 4-n-14 能以複名數解決量（長度、容量、重量）的計算問題。
3. 4-n-19 能認識體積及體積單位「立方公分」。
4. 5-n-20 能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。（同 5-s-07）。

(三) 延伸的知識

6-n-15 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。

十二年國教課綱（學習內容）（草案，送部版）

(一) 評量重點

N-5-15 **解題**：容積。容量、容積和體積間的關係。知道液體體積的意義。

(二) 先備的知識

1. N-3-15 **容量**：「公升」、「毫升」。實測、量感、估測與計算。單位換算。
2. N-4-12 **體積與「立方公分」**：以具體操作為主。體積認識基於 1 立方公分之正方體。
3. S-4-4 **體積**：以具體操作為主。在活動中認識體積的意義與比較。認識 1 立方公分之正方體，能理解並計數正方體堆疊的體積。
4. S-5-5 **正方體和長方體**：計算正方體和長方體的體積與表面積。正方體與長方體的體積公式。

(三) 延伸的知識

S-6-4 **柱體體積與表面積**：含角柱和圓柱。利用簡單柱體，理解「柱體體積＝底面積×高」的公式。簡單複合形體體積。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

了解容量與體積的關係，並算出沉入水中物體的體積等於物體所排開的水量。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

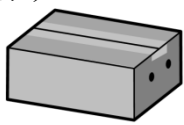



1. **放入容器中物體的體積與容器的容積概念混淆不清**：學生誤以為容器的容積就是放入容器中物體的體積。
2. **放入容器中物體的體積與容器的液量之間關係概念不清**：學生誤以為放入容器中物體的體積與容器中容液的液量相等。
3. **放入容器中物體的體積與上升水的體積之間關係混淆不清**：學生不知道容器放入物體後，容器水位上升 5 公分，上升水位的體積就是容器的長×寬×水位上升高度（5 公分），也就是放入容器中物體的體積。學生會誤以水位上升 5 公分，體積就是 5 立方公分。或是學生再計算物體體積時，未察覺水位上升或下降高低，只算長×寬就是物體的體積。
4. **沉入水中物體的體積與排開水量之間關係混淆不清**：學生不知道物體沉入水中部份的體積，會與放入容器中後所排開水量的體積相等。

(三) 核心概念的教學重點

1. 體積、容積、液量與容量之定義：

- (1) **體積**：物體所佔空間的大小，如【圖 14-1】。
- (2) **容積**：某一具有確定三度空間的周界內的空間大小，通常此空間有容納物質可以隨時存取的功能，如【圖 14-2】。
- (3) **液量**：指容器內液體的量，如【圖 14-3】。

(4) **容量**：指容器可裝載的最大液量，如【圖 14-4】。

類別	體積	容積	液量	容量
範 例	紙箱的大小 20×30×50(公分)。  【圖 14-1】	水壺可以用來 裝多少的水。  【圖 14-2】	浴缸裡的水有 多少。  【圖 14-3】	杯子裡面最多 可裝125 ml的 水。  【圖 14-4】

2. 將規則形狀的物體完全沉入水中，「物體的體積等於上升水的體積」

- (1) 藉由規則形狀可沉入水的物體放入量筒前後的水位變化來推論物體的體積和上升水的體積一樣：
- (2) 物體完全沉入水中，水就會上升，將一個長方體積木放入量筒時，水上升的水量會和長方體積木體積的立方公分數一樣。因為長方體的體積把一樣體積的水擠掉了，水就上升了。
- (3) 在量筒中裝 500 毫升的水。
- (4) 準備一個體積是 60 立方公分的長方體，將長方體完全沉入水中。
- (5) 觀察量筒水位上升了 60 毫升，1 毫升的水是 1 立方公分，60 毫公升的水就是 60 立方公分，與長方體的體積 60 立方公分相等。
- (6) 由此可知，完全沉入水中物體的體積與上升水的體積相等。

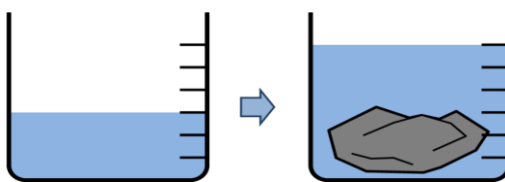
3. 物體沒有完全沉入水中時，上升水量的體積和物體的體積不同

- (1) 在量筒中裝 500 毫升的水。
- (2) 將一塊體積 60 立方公分的保麗龍長方體放入水中，保麗龍沒有完全沉入水中。
- (3) 觀察量筒水位上升水量並不是 60 毫升，甚至少於 60 毫升。
- (4) 物體沒有完全沉入水中時，物體的體積與上升水的體積不相等。

4. 不規則實體的體積之測量：可由規則形狀可沉沒水的物體的體積與排開水的體積相等，推測不規則形狀物體放入水中後，物體的體積和排開水的體積相等。

- (1) 將量筒中裝 300 毫升的水。
- (2) 將一個不規則的物體放入量筒中，水量從 300 毫升上升到 600 毫升，如【圖 14-5】。

- (3) 水位上升了 300 毫升，利用「可沉沒水的物體的體積與排開水的體積相等」的概念，所以知道這個物體的體積是 300 立方公分。



【圖 14-5】

5. 以排水法測定浸沒水中物體體積：由排開（上升）水的體積與完全沉入水中物體的體積相等。

- (1) 將寬 20 公分，長 30 公分的長方體容器內裝水，在水位高度做上記號（原先水位高度 38 公分），再將大石頭放入容器內，使大石頭完全沉沒水中。
- (2) 將上升後的水位高度做上記號（水位高度 40 公分），再將大石頭取出。
- (3) 利用量筒慢慢倒水至後來做記號的位置，並計算倒入水的體積為 1200 立方公分。
- (4) 倒入水的體積 1200 立方公分就是大石頭的體積。

6. 由上升水的體積及容器的長、寬求出水位上升高度

- (1) 實際試驗：將 10 公升的水倒入寬 50 公分，長 100 公分的長方體水族箱中，發現水位高度從原本的 0 公分來到 2 公分，也就是水位上升 2 公分。
- (2) 10 公升的水和 10000 毫升的水一樣多，也就是 10000 立方公分。
- (3) 10 公升的水體積是 10000 立方公分，倒入長方體水族箱中，可以讓水位上升多少公分呢？原本水量的計算方式是「容器的長」×「容器的寬」×「上升的水高」，也就是 $100 \times 50 \times \text{上升的水高} = 10000$ 。
- (4) 由此可知上升的水高是 $10000 \div 100 \div 50 = 2$ 公分。

7. 有關牽涉容器的厚度的容積問題：

容積的概念，可從容器內部的形狀和大小開始討論，老師可以帶領學生用 1 立方公分積木來填滿一個盒子內部的空間，透過這樣的活動才能宣告盒子內部空間的體積就是容積。接著再與學生討論容器外部的長、寬、高和內部長、寬、高的差異，也就是容器的厚度，並知道如何用外部的長、寬、高算出內部的長、寬、高，以計算出容器的容積。

- (1) 已知容器內部的長、寬、高：學生就可以直接利用長×寬×高的體積計算方式來計算容器的容積。
- (2) 無蓋容器求容量：學生在解題時，必須先將容器外部的長、寬分別扣掉容器厚度×2，才是容器內部的長、寬；而容器內部的高是將外部的高扣掉容器厚度×1。如此一來才能知道容器內部的的長、寬、高，

再進一步可計算出容器內部的容積。(計算內部長、寬、高時，外部的「長」和「寬」須扣掉 2 個容器厚度，「高」因為無蓋，所以只須扣掉 1 個厚度)

- (3) **有蓋容器求容量：**學生在解題時，必須先將容器外部的長、寬、高分別扣掉容器厚度 $\times 2$ ，才能算出內部的長、寬、高，再進一步計算出容器的容積。(「長」和「寬」須扣掉 2 個容器厚度，「高」因為有蓋，所以必須扣掉 2 個厚度)

(四) **本題教學的加強重點**

利用容器的長、寬和水位的高度差，求出上升水的體積也就是沉入水中物體的體積。

1. 物體須完全沉入水中，物體的體積和排開水的體積一樣。放入水中物體的體積求法，可以利用無刻度的容器前後產生水位變化，計算變化的水量。
2. 當一個假山完全沉入水中時，水位高度從 38 公分上升到 40 公分，增加的水量會和容器的長、寬及水位的高度差，三數的乘積相同。
3. 水位的高度差距是 $40 - 38 = 2$ 公分，長方體水族箱的長 100 公分、寬 50 公分，所以上升的水量是 $100 \times 50 \times 2 = 10000$ 毫升 $= 10000$ 立方公分
4. 物體完全沉入水中後，物體的體積與上升水量的體積是一樣的。上升水量的體積是 10000 立方公分，所以假山的體積也是 10000 立方公分。

第 15 題

知識向度	量與實測	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-n-19 能認識體積單位「立方公尺」、「立方公分」及「立方公尺」間的關係，並做相關計算。																														
題目	一個邊長 1 公尺的正方體，它的體積和多少個 1 立方公分的小正方體一樣大？（1 公尺＝100 公分） ① 100 個 ② 1000 個 ③ 10000 個 ④ 1000000 個																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：4</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.27</td><td>0.06</td><td>0.14</td><td>0.53</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.06</td><td>0.01</td><td>0.09</td><td>0.84</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.44</td><td>0.13</td><td>0.17</td><td>0.25</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：4	選項率	0.27	0.06	0.14	0.53	0.00		高分組	0.06	0.01	0.09	0.84	0.00		低分組	0.44	0.13	0.17	0.25	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：4																									
選項率	0.27	0.06	0.14	0.53	0.00																										
高分組	0.06	0.01	0.09	0.84	0.00																										
低分組	0.44	0.13	0.17	0.25	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.59，通過率為 0.53，試題難易度 0.55。

(二) 評量目標說明

本題是要求學生能由 1 公尺=100 公分來理解 1 立方公尺代表的意義，評量學生知道 1 立方公尺可以是 1 個邊長 1 公尺正方體的體積，也就是正方體的每個邊堆滿了 100 個 1 立方公分小正方體，每層一排有 100 個 1 立方公分正方體，有 100 排，一層有 $100 \times 100 = 10000$ 個 1 立方公分的小正方體，總共有 100 層，所以是 $10000 \times 100 = 1000000$ 個 1 立方公分小正方體。

(三) 選項表現說明

- 有 53% 的學生選擇正確選項④，顯示約 5 成多的學生已經正確理解 1 立方公尺=1000000 立方公分。
- 有 27% 的學生選擇①，這些學生選擇需要 100 個 1 立方公分，學生可能依據題目給了 1 公尺=100 公分，而誤認為邊長 1 公尺的正方體需要 100 個 1 立方公分組成，
- 有 14% 的學生選擇③，這些學生選了需要 10000 個 1 立方公分，學生認為 1

平方公尺=10000 平方公分，而誤以為 10000 立方公分所堆疊出來的體積就是 1 立方公尺。

4. 有 6% 的學生選擇②，這些學生選了需要 1000 個 1 立方公分，學生可能將 1 公升與 1 立方公尺混淆，誤認為 1 公升=1000 立方公分，也就是 1 立方公尺需要 1000 個 1 立方公分組成。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計為主要希望了解學生對於「邊長 1 公尺的正方體，體積是 1 立方公尺，需要使用 1000000 個 1 立方公分的小正方體才能堆疊而成」，或是「需要使用 1000000 個 1 立方公分的小正方體，才能堆疊出 1 立方公尺的大正方體。」，任一概念是否完全清楚。學生能清楚知道 1 立方公尺=1000000 立方公分的概念，即能正確解答本題。
2. 本題難易度為 0.55。有將近 5 成多的學生理解 1 立方公尺是 1000000 立方公分。但仍有 4 成多的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，84 % 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 25% 回答正確。選擇錯誤選項的學生可能對於「立方公分」及「立方公尺」間的關係並未充分掌握，認為 1 立方公尺=100 立方公分，或是 1 立方公尺=1000 立方公分，甚至 1 立方公尺=10000 立方公分，把這些錯誤的觀念當作是本題解答。

二、 教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-19 能認識體積單位「立方公尺」、「立方公分」及「立方公尺」間的關係，並做相關計算。

(二) 先備的知識

1. 2-n-15 能認識長度單位「公分」、「公尺」及其關係，並能做相關的實測、估測與同單位的計算。
2. 3-n-14 能認識長度單位「毫米」及「公尺」、「公分」、「毫米」間的關係，並做相關的實測、估測與計算。
3. 4-n-19 能認識體積及體積單位「立方公分」。

(三) 延伸的知識

6-n-15 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。

十二年國教課綱（學習內容）（草案，送部版）

(一) 評量重點

1. S-5-5 正方體和長方體：計算正方體和長方體的體積與表面積。正方體與長方體的體積公式。
2. N-5-14 體積：「立方公尺」。簡單實測、量感、估測與計算。

(二) 先備的知識

1. N-2-11 **長度**：「公分」、「公尺」。實測、量感、估測與計算。單位換算。
2. S-4-4 **體積**：以具體操作為主。在活動中認識體積的意義與比較。認識 1 立方公分之正方體，能理解並計數正方體堆疊的體積。
3. N-4-12 **體積與「立方公分」**：以具體操作為主。體積認識基於 1 立方公分之正方體。

(三) 延伸的知識

S-6-4 **柱體體積與表面積**：含角柱和圓柱。利用簡單柱體，理解「柱體體積＝底面積×高」的公式。簡單複合形體體積。

三、教學建議**(一) 評量核心概念**

辨識 1 立方公尺＝1000000 立方公分。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 「面積單位」與「長度單位」混淆不清：因為 1 公尺＝100 公分，誤認 1 平方公尺＝100 平方公分。
2. 「體積單位」與「長度單位」混淆不清：因為 1 公尺＝100 公分，誤認 1 立方公尺＝100 立方公分。
3. 「體積單位」與「面積單位」混淆不清：將立方公尺和立方公分單位換算錯誤。學生容易將 1 立方公尺＝1000000 立方公分，與 1 平方公尺＝10000 平方公分混淆。
4. 「體積單位」與「容量單位」混淆不清：誤認 1 立方公尺＝1 公升＝1000 立方公分。

(三) 核心概念的教學重點**1. 1 平方公尺和 1 公尺的不同**

- (1) **周長和面積大不同**：計算正方形周長的公式是「邊長×4」，計算正方形的面積公式是「邊長×邊長」。有些學童在計算周長與面積時會將兩個公式互相混淆，例如：他們會將正方形的周長公式「邊長×4」當作是面積公式；或將「長×寬」當作是長方形的周長公式，導致學生會以面積公式解周長問題。
- (2) **先教周長，再教面積概念**：老師可以先教周長概念，待學生理解並熟悉後，再進行面積部分的教學。老師也可以利用毛線或皮尺來教學生測量周界長度，利用平方公分板數格子的方式來測量面積大小。除此之外可以提供圖形讓學生具體描繪矩形的周界與面積。
- (3) **公分和公尺、平方公分和平方公尺的單位換算**：有一個邊長 1 公尺的正方形，1 公尺等於 100 公分，也就是這個正方形一邊可以排 100 個

1 平方公分，總共可以排 100 排，所以面積是 $100(\text{個}) \times 100(\text{排}) = 10000(\text{個})$ 平方公分，所以 1 平方公尺 = 10000 平方公分，面積是跟著「邊長 \times 邊長」在變化。透過公分與公尺之間關係說明，以推演平方公尺與平方公分的單位**換算**，並透過平方公分板之實體操作讓學生更清楚面積單位之換算。

- (1) **長度是一維空間，面積是二維空間：**建立學生公分和公尺是長度的單位，屬於一維空間；而平方公分和平方公尺則是面積的單位，是屬於二維空間，邊長 1 公尺的正方形構成的面積是 1 平方公尺，也就是 10000 平方公分；因此面積和長度兩者大不相同。

2. 1 立方公尺和 1 平方公尺的不同

- (1) **面積和體積大不同：**1 立方公尺和 1 平方公尺，最大的相同點在於都有「公尺」，所以學生容易搞混兩者之間的關係。但立方公尺是計算立體形體體積的單位，而平方公尺是計算平面圖形面積的單位。同樣是以 1 公尺為邊長構成的圖形，邊長 1 公尺的正方形構成的面積是 1 平方公尺；邊長 1 公尺的正方體構成的體積是 1 立方公尺。
- (2) **認識 1 平方公尺：**教學時，老師可以用一張邊長 10 公分的色紙做基準，這張色紙的面積是 100 平方公分。接著請學生圍出邊長 1 公尺的正方形大小，學生利用色紙做拼排，請學生紀錄這個邊長 1 公尺的正方形面積，用了幾張色紙。學生可以發現一排用了 10 張色紙，排了 10 排，所以用了 $10 \times 10 = 100$ 張色紙。所以這個邊長 1 公尺的正方形面積大小是 $100(\text{平方公分}) \times 100(\text{張}) = 10000$ 平方公分。所以邊長邊長 1 公尺的正方形構成的面積大小是 10000 平方公分。
- (3) **認識 1 立方公尺：**教學時，老師可以用一個邊長 10 公分的立體紙盒做基準，這個紙盒的體積是 1000 立方公分。接著請學生利用 1 立方公尺的教具，圍出邊長 1 公尺的正方體大小，學生利用立體紙盒做堆疊，請學生紀錄這個邊長 1 公尺的正方體體積，用了幾個立體紙盒。學生可以發現一層是一排用了 10 個立體紙盒，排了 10 排，所以用了 $10 \times 10 = 100$ 個立體紙盒，是 $100(\text{立方公分}) \times 1000(\text{個}) = 100000$ 立方公分。這個邊長 1 公尺的正方體總共需要堆疊 10 層，體積大小是 $100000(\text{立方公分}) \times 10(\text{層}) = 1000000$ 立方公分。所以邊長邊長 1 公尺的正方體構成的體積大小是 1000000 立方公分。
- (4) **總結：**邊長 1 公尺的正方形構成的面積是 1 平方公尺，也就是 10000 平方公分，屬於二維的平面空間；邊長 1 公尺的正方體構成的體積是 1 立方公尺，也就是 1000000 立方公分，是屬於三維的立體空間。所以平方公分或平方公尺是計算平面面積的單位，而立方公分或立方公尺是計算立體體積的單位，兩者不可以混淆。

3. 1 立方公尺與 1 立方公分的關係

作 1 立方公分與 1 立方公尺間的關係及其換算。並以 1 公升做無縫隙的立體堆疊，培養 1 立方公尺的量感。生活中，孩子很少有機會接觸 1 立方公尺的物品，所以缺乏 1 立方公尺的量感，老師可利用紙板拼成實際大小 1

立方公尺的紙箱，讓學生感受 1 立方公尺的大小，有了量感後才能有數感。

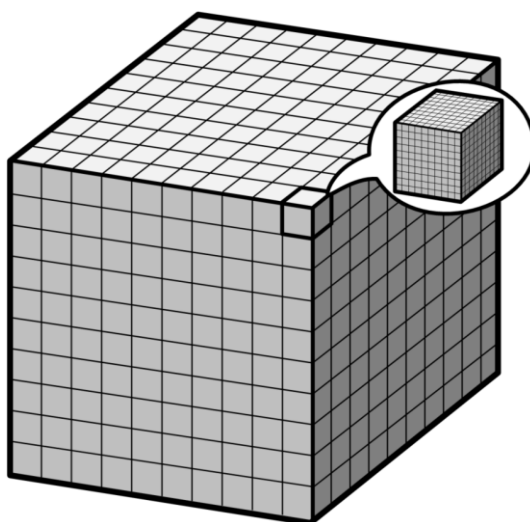
1 立方公尺是每邊長 1 公尺所組成的正方體，也可以說是每邊長 100 公分所組成的正方體，所以 1 立方公尺正方體的體積是 $100 \times 100 \times 100$ 個 1 立方公分所組成，體積是 1000000 立方公分。

(四) 本題教學的加強重點

1. **1 立方公尺的教具使用：**老師可以準備 12 根長 1 公尺的木棍，讓學生小組做成 1 立方公尺正方體的骨架，或是坊間已有完成可直接拼接成 1 立方公尺的骨架。

再者也可利用 6 片 1 平方公尺的紙板拼成 1 立方公尺實際大小的紙箱。讓學生可以嘗試 1 立方公尺的紙箱可以容納幾個人，或是用 1000 立方公分的正方體積木堆疊，需要幾塊 1000 立方公分正方體積木可以堆滿整個 1 立方公尺教具，藉由實際操作與觀察建立學生對 1 立方公尺的量感。

2. **圖示的表徵：**建議老師畫一個邊長 1 公尺的正方體視圖、透視圖，如【圖 15-1】在黑板上，一個正方體分成 100 層，每一層體積是 $100 \times 100 = 10000$ 立方公分，100 層的體積是 10000×100 個 1 立方公分是 1000000 立方公分。



【圖 15-1】

3. **使用正方體體積計算：**每邊長 1 公尺 = 100 公分，正方體體積 = 邊長 \times 邊長 \times 邊長， $100 \times 100 \times 100 = 1000000$ 立方公分。

(五) 其他

可利用體積定位板（1 立方公尺 = 1000000 立方公分）

立方公尺						立方公分
百萬位	十萬位	萬位	千位	百位	十位	個位

第 16 題

知識向度	量與實測	認知向度	解題思考																												
對應分年細目	5-n-17 能認識面積單位「公畝」、「公頃」、「平方公里」及其關係，並做相關計算。																														
題目	有一塊正方形的土地面積是 1 公頃，這塊正方形土地的周長是多少？（1 公頃＝10000 平方公尺） ① 100 公尺 ② 400 公尺 ③ 10000 公尺 ④ 40000 公尺																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：2</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.25</td><td>0.23</td><td>0.24</td><td>0.28</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.29</td><td>0.45</td><td>0.12</td><td>0.14</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.18</td><td>0.10</td><td>0.33</td><td>0.38</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.25	0.23	0.24	0.28	0.00		高分組	0.29	0.45	0.12	0.14	0.00		低分組	0.18	0.10	0.33	0.38	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																									
選項率	0.25	0.23	0.24	0.28	0.00																										
高分組	0.29	0.45	0.12	0.14	0.00																										
低分組	0.18	0.10	0.33	0.38	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.35，通過率為 0.23，試題難易度 0.28。

(二) 評量目標說明

本題是要學生思考 1 公頃的面積大小相當於邊長多少公尺的正方形土地，進而解決正方形周長的問題，要求學生能由 1 公頃＝10000 平方公尺的，推算出此正方形土地的邊長 100 公尺，其周長是 400 公尺，評量學生是否認知「1 公頃」相當於「邊長 100 公尺的正方形面積」。

(三) 選項表現說明

1. 有 23% 的學生選擇正確選項②，顯示約三成的學生已經掌握「1 公頃」相當於「邊長 100 公尺的正方形面積」並且能正確計算出正方形的周長。
2. 有 28% 的學生選擇④，這些學生可能把「10000 平方公尺」的 10000 直接當作是正方形土地的邊長，而算出正方形的周長是 40000 公尺。
3. 有 25% 的學生選擇①，這些學生可能已經掌握「1 公頃」相當於「邊長 100 公尺的正方形面積」，卻沒留意題目要求的是周長不是邊長。
4. 有 24% 的學生選擇③，這些學生可能不懂「1 公頃」的意義，又沒看懂題目

要求的「周長」。因此，以 1 公頃＝10000 平方公尺的 10000 來作答。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計為主要希望了解學生，對於「1 公頃＝10000 平方公尺」，此一概念是否完全清楚。因此，在題目中特別設計是一塊正方形的土地，且不是問邊長，而問周長是多少，而從學生的評量表現發現學生對於面積單位的換算以及周長的定義不清楚。
2. 本題難易度為 0.28。有二成多的學生能掌握「1 公頃＝10000 平方公尺」和正方形周長這兩個概念，但仍有七成多的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，45% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 10% 回答正確。其中低分組有 38% 學生選擇④和 33% 學生選擇③，學生無法將 1 公頃轉換成面積相同的正方形，表示不理解「公頃」和「平方公尺」的意義，因此，才會將 10000 或 10000 直接乘以 4 視為本題的答案；低分組有 18% 學生選擇①，顯示這些學生能理解面積單位「公頃」與「平方公尺」的意義，且能將 1 公頃轉換成面積相同的正方形，但需要再加強正方形周長的概念。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-17 能認識面積單位「公畝」、「公頃」、「平方公里」及其關係，並做相關計算。

(二) 先備的知識

1. 4-n-17 能認識面積單位「平方公尺」，及「平方公分」、「平方公尺」間的關係，並做相關計算。
2. 4-n-18 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。

(三) 延伸的知識

6-n-14 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。(同 6-s-03)

十二年國教課綱（學習內容）（草案，送部版）

(一) 評量重點

N-5-12 面積：「公畝」、「公頃」、「平方公里」。生活實例之應用。含與「平方公尺」的換算與計算。使用概數。

(二) 先備的知識

1. S-4-3 正方形與長方形的面積與周長：理解邊長與周長或面積的關係，並能理解其公式與應用。簡單複合圖形。
2. N-4-11 面積：「平方公尺」。實測、量感、估測與計算。

(三) 延伸的知識

S-6-3 圓周率、圓周長、圓面積、扇形面積：用分割說明圓面積公式。求扇形弧長與面積。知道以下三個比相等：(1) 圓心角：360；(2) 扇形弧長：圓周長；(3) 扇形面積：圓面積，但應用問題只處理用(1)求弧長或面積。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

認識 1 公畝=100 平方公尺；1 公頃=100 公畝；1 平方公里=100 公頃=10000 公畝=1000000 平方公尺。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 缺乏量感：缺乏 1 平方公里、1 公頃、1 公畝、100 平方公尺、1 平方公尺的量感。
2. 混淆公頃、公畝的單位：學生容易誤將 1 公頃當成 1000 公畝，1 公畝=1000 平方公尺。

(三) 核心概念的教學重點

1. 認識和理解面積單位「1 平方公分」、「1 平方公尺」、「1 公畝」、「1 公頃」、「1 平方公里」，以及與長度的單位不同
 - (1) 複習面積單位「1 平方公分」、「1 平方公尺」，進而引出「1 平方公里」：老師先帶領學生複習舊經驗，邊長 1 公分的正方形，面積是「1 平方公分」、邊長 1 公尺的正方形，面積是「1 平方公尺」，接著再引出邊長 1 公里的正方形，面積是「1 平方公里」。
 - (2) 大單位的命名和定義：繼續利用平方公尺的單位來描述「1 公畝」、「1 公頃」、「1 平方公里」，建議教師可以先命名「邊長 10 公尺正方形的面積為 1 公畝」、「邊長 100 公尺正方形的面積為 1 公頃」、「邊長 1000 公尺正方形的面積為 1 平方公里」，再透過面積公式說明「1 公畝的面積為 100 平方公尺」，「1 公頃的面積為 10000 平方公尺」，「1 平方公里的面積為 1000000 平方公尺」。
2. 進行面積實測活動，以增加學生的量感：學生能對 1 平方公分、1 平方公尺、1 公畝、1 公頃和 1 平方公里有實際量感。
 - (1) 可以舉例讓學生能知道手指甲的大小大約是 1 平方公分。
 - (2) 可以舉例讓學生能知道一張報紙攤開後的大小大約是 1 平方公尺；1 張貼紙的大小約是 10 平方公分。
 - (3) 先討論如何在躲避球場上圍出面積是 1 公畝的範圍，再到躲避球場上圍出來，並知道躲避球場比 1 公畝大。
 - (4) 可以先與學生討論 1 公頃有多大，由於 1 公頃面積較大比較不能直接觀察得到。建議教師舉例大約 1 公頃大小的公共場地或就近的大型運動場，例如「新莊體育館」的面積是 10928 平方公尺，比 1 公頃大一

些。

- (5) 可以先與學生討論 1 公里有多大，由於 1 公里面積非常廣大無法直接觀察得到。建議教師舉例人人皆知的公共場地大小與 1 平方公里作比較，進而感知 1 平方公里的實際大小，例如「大安森林公園的面積是 25.894 公頃」，那麼「4 個大安森林公園的面積大約是 1 平方公里」；也可舉例所居住城市，以新北市為例，面積是 2053 平方公里。

3. 「平方公尺」、「公畝」、「公頃」與「平方公里」單位間的化聚

(1) 「平方公尺」與「公畝」單位間的化聚

- 甲、知道「1 公畝=100 平方公尺」，練習多少個 1 公畝是多少平方公尺，並將以公畝為單位的面積化為以平方公尺為單位，例如：2 公畝是多少平方公尺？
- 乙、知道「1 平方公尺=0.01 公畝」，練習將以平方公尺為單位的面積聚為以公畝為單位，例如：3 平方公尺是幾公畝？
- 丙、探究 1 平方公尺是多少公畝，教師可以帶領學生從「1 公畝=100 平方公尺」中明白 1 公畝是 100 個 1 平方公尺，那麼 1 個 1 平方公尺是 $\frac{1}{100}$ 公畝，也就是 0.01 公畝，得到的結果是「1 平方公尺=0.01 公畝」。並將以平方公尺為單位的面積轉化為以公畝為單位，例如 2 平方公尺是多少公畝？20 平方公尺是多少公畝？

(2) 「平方公尺」與「公頃」單位間的化聚

- 甲、知道「1 公頃=10000 平方公尺」，練習多少個 1 公頃是多少平方公尺，並將以公頃為單位的面積化為以平方公尺為單位，例如：2 個 1 公頃是多少公頃？是多少平方公尺？
- 乙、知道「1 平方公尺=0.0001 公頃」，練習將以平方公尺為單位的面積聚為以公頃為單位，例如：10000 平方公尺是 1 公頃，30000 平方公尺是幾公頃？
- 丙、探究 1 平方公尺是多少公頃，教師可以帶領學生從「1 公頃=10000 平方公尺」中明白 1 公頃是 10000 個 1 平方公尺，那麼 1 個 1 平方公尺是 $\frac{1}{10000}$ 公頃，也就是 0.0001 公頃，得到的結果是「1 平方公尺=0.0001 公頃」。並將以平方公尺為單位的面積聚為以公頃為單位，例如 2 平方公尺是多少公頃？20 平方公尺是多少公頃？200 平方公尺是多少公頃？

(3) 「公畝」與「公頃」單位間的化聚

- 甲、思考與探究「1 公頃是多少公畝」？並將以 1 公頃為單位的面積化為以平方公尺為單位，1 公畝為單位的面積化為以平方公尺為單位，可以得到「公畝」和「公頃」的關係是「1 公頃等於 100 公畝」。

乙、知道「1 公頃＝100 公畝」，練習將以公頃為單位的面積化為以公畝為單位。例如：3 公頃是多少公畝？是多少平方公尺？

丙、知道「1 公畝＝0.01 公頃」，練習將以公畝為單位的面積聚為以公頃為單位，例如：500 公畝是多少公頃？

丁、探究 1 公畝是多少公頃，教師可以帶領學生從「1 公頃＝100 公畝」中明白 1 公頃是 100 個 1 公畝，那麼 1 個 1 公畝是 $\frac{1}{100}$ 公頃，也就是 0.01 公頃，得到的結果是「1 公畝＝0.01 公頃」。並將以公畝為單位的面積聚為以公頃為單位，例如 2 公畝是多少公頃？20 公畝是多少公頃？

(4) 「平方公尺」與「平方公里」單位間的化聚

甲、知道「1 平方公里＝1000000 平方公尺」練習多少個 1 平方公里是多少平方公尺，並將以平方公里為單位的面積化為以平方公尺為單位，例如：2 個 1 平方公里是多少平方公里？是多少平方公尺？

乙、知道「1 平方公尺＝0.000001 平方公里」練習將以平方公尺為單位的面積聚為以平方公里為單位，例如：2 平方公尺是幾平方公里？

丙、探究 1 平方公尺是多少平方公里，教師可以帶領學生從「1 平方公里＝1000000 平方公尺」中明白 1 平方公里是 1000000 個 1 平方公尺，那麼 1 個 1 平方公尺是 $\frac{1}{1000000}$ 公頃，也就是 0.000001 公頃，得到的結果是「1 平方公尺＝0.000001 平方公里」。並將以平方公尺為單位的面積聚為以平方公里為單位，例如 1 平方公尺是 0.000001 平方公里，3 平方公尺是幾平方公里？

(5) 綜合以上面積單位的關係和轉換，可以用以下的寫法來加深學生的概念：

$\uparrow(\times 100)\downarrow$
 1 公頃＝() 公畝；
 $\uparrow(\div 100)\downarrow$

$\uparrow(\times 100)\downarrow$
 1 平方公里＝() 公頃；
 $\uparrow(\div 100)\downarrow$

$\uparrow(\times 10000)\downarrow$
 1 平方公里＝() 公畝。
 $\uparrow(\div 10000)\downarrow$

4. 使用面積定位板，可以幫助學生做面積單位的轉換

- (1) **1 平方公尺=10000 平方公分，是邊長 1 公尺圍成的正方形面積。**例如：長 500 公分，寬 20 公分的長方形布條，面積是多少？

平方公尺				平方公分
萬位	千位	百位	十位	個位

- (2) **1 公畝=100 平方公尺=1000000 平方公分，是邊長 10 公尺圍成的正方形面積。**例如：長 20 公尺，寬 5 公尺的長方形草皮，面積是多少？

公畝		平方公尺				平方公分
百萬位	十萬位	萬位	千位	百位	十位	個位

- (3) **1 公頃=100 公畝=10000 平方公尺，是邊長 100 公尺圍成的正方形面積。**例如：邊長為 100 公尺的正方形農地，面積是多少？

公頃		公畝		平方公尺
萬位	千位	百位	十位	個位

- (4) **1 平方公里=100 公頃=10000 公畝，是邊長 1000 公尺圍成的正方形面積。**例如：長 1250 公尺、寬 800 公尺的長方形公園，面積是多少？

平方公里		公頃		公畝
萬位	千位	百位	十位	個位

(四) 本題教學的加強重點

1. 加強「1 公頃=10000 平方公尺」的量感

- (1) 學生在舊經驗認識了邊長 1 公尺的正方形，面積是 1 平方公尺，教師讓學生了解邊長 100 公尺的正方形，面積是 10000 平方公尺，教師宣告這一個正方形的大小也可以稱為 1 公頃。
- (2) 教師提供一個可以讓學生看到 1 公頃的場景，親自體會 1 公頃的大小，強化學生對於 1 公頃的面積單位有更具體的量感。
- (3) 學生舉例日常生活中哪裡有大約 1 公頃的場地或區域，與生活連結加

深印象。

2. 10000 公尺和 10000 平方公尺的不同

- (1) 釐清學生對於面積和周長概念的混淆，加強學生對於面積的概念指的是邊長所圍起來裡面區域的大小，而周長是指周界長度。
- (2) 釐清單位的意義，「公尺」是長度的單位，「平方公尺」是面積的單位。

(五) 其他

找出適當的面積單位：

- 1. 一個操場的面積大約是 25 ()。 答：公畝。
- 2. 陽明山國家公園的面積大約是 113 ()。 答：平方公里。
- 3. 一所學校的面積大約是 3.6 ()。 答：公頃。
- 4. 一間教室的面積大約是 0.8 ()。 答：公畝。

第 17 題

知識向度	數與計算	認知向度	解題思考																												
對應分年細目	5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。																														
題目	<p>「有 2 位家長請全班喝飲料，飲料每杯 45 元；因為訂了 30 杯，所以老闆每杯便宜 5 元。這 2 位家長每人平均要付多少元？」下列哪一個算式能算出正確答案？</p> <p>① $(45-5) \times 30 \div 2$ ② $(45-5 \times 30) \div 2$ ③ $(45 \times 30-5) \div 2$ ④ $45 \times 30-5 \div 2$</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：1</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.73</td><td>0.10</td><td>0.13</td><td>0.05</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.93</td><td>0.03</td><td>0.04</td><td>0.01</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.50</td><td>0.17</td><td>0.23</td><td>0.10</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：1	選項率	0.73	0.10	0.13	0.05	0.00		高分組	0.93	0.03	0.04	0.01	0.00		低分組	0.50	0.17	0.23	0.10	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：1																									
選項率	0.73	0.10	0.13	0.05	0.00																										
高分組	0.93	0.03	0.04	0.01	0.00																										
低分組	0.50	0.17	0.23	0.10	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.44，通過率為 0.73，試題難易度 0.72。

(二) 評量目標說明

本題是解決減、乘、除三步驟以及併式的計算問題，要求學生能在具體情境中，將三步驟的問題進行併式，評量學生三步驟併式計算的能力。

(三) 選項表現說明

- 有 73% 的學生選擇正確選項①，顯示約七成三的學生已經掌握三步驟併式計算的能力。
- 有 13% 的學生選擇③，這些學生可能把「每杯」便宜 5 元，看作「整體」便宜 5 元，而認為 $45 \times 30 - 5$ 可以表達題意。
- 有 10% 的學生選擇②，這些學生可能不清楚寫成併式時，乘（除）的計算優先於減（加）的運算，而認為 $45 - 5 \times 30$ 可以表達「計算 $45 - 5$ 的結果，再 $\times 30$ 」。
- 有 5% 的學生選擇④，這些學生有上述第 2 項的情形，再加上可能不清楚乘

(除)的計算優先於減(加)的運算,而認為 $45 \times 30 - 5 \div 2$ 可以表達「 $45 \times 30 - 5 = 1345$ 與 $1345 \div 2 = 672.5$ 的併式」。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計為主要希望了解學生,對於「減、乘、除三步驟以及併式的計算」,此一概念是否完全清楚。因此,在題目中設計減、乘、除三步驟的情境,而要併式計算時,學生有可能會不清楚併式時,乘(除)的計算優先於減(加)的運算,而忘了要加括弧。
2. 本題難易度為 0.72。有約七成三的學生能解決減、乘、除三步驟以及併式的計算問題,但仍有二成多的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看,93%的高分組學生能正確回答問題,而低分組學生有 50%回答正確。其中低分組有 23%學生選擇③,顯示學生沒有理解題意,但明白括弧使用的意義;低分組有 17%學生選擇②,顯示學生完全理解題意,但還不熟悉括弧使用的意義;低分組有 10%學生選擇④,顯示學生沒有理解題意,也不清楚何時需要用括弧。

二、教材地位分析

97 課綱(分年細目)

(一) 評量重點

5-n-02 能在具體情境中,解決三步驟問題,並能併式計算。

(二) 先備的知識

4-n-04 能在具體情境中,解決兩步驟問題,並學習併式的記法與計算。

(三) 延伸的知識

1. 6-n-05 能在具體情境中,解決分數的兩步驟問題,並能併式計算。
2. 6-n-08 能在具體情境中,解決小數的兩步驟問題,並能併式計算。

十二年國教課綱(學習內容)(草案,送部版)

(一) 評量重點

1. N-5-2 **解題**:多步驟應用問題。除「平均」之外,原則上為三步驟解題應用。
2. R-5-1 **三步驟問題併式**:建立將計算步驟併式的習慣,以三步驟為主。介紹「平均」。與分配律連結。

(二) 先備的知識

1. R-4-1 **兩步驟問題併式**:併式是代數學習的重要基礎。含四則合計算的約定(由左往右算、先乘除後加減、括號先算)。學習逐次減項計算。
2. R-4-2 **四則計算規律(I)**:兩步驟計算規則。加減混合計算、除混合計算。在四則混合計算中運用數的運算性質

(三) 延伸的知識

N-6-5 解題：整數、分數、小數的四則應用問題。二到三步驟應用解題。含使用概數協助解題。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

解決減、乘、除三步驟問題並能併式計算。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. **未能理解題意**：在不理解題意的情況之下，可能會將題目出現的數字依序先後順序寫出並隨意加入 $+$ 、 $-$ 、 \times 、 \div 的運算符號。如同本能力檢測試題，學生會選答錯誤③的情形。
2. **未能理解四則運算規約的使用**：
 - (1) 應該由左而右的計算，有可能出現加法先算的錯誤情形，例如 $56-10+6=56-16$ ；也有可能出現乘法先算的錯誤情形，例如 $100\div4\times5=100\div20$ 。
 - (2) 應該先算乘（除），再算加（減），卻有可能出現由左而右計算的錯誤情形，例如 $24+6\times8=30\times8$ 。
 - (3) 不清楚括號表示括號內的算式先算的概念，就會出現併式時，若想要加（減）的運算優先於乘（除）的運算，不知道此時需要使用（ ）來表示。
3. **併式記錄錯誤**：以本能力檢測試題為例，針對前兩步驟來看併式問題，先算 $45-5=40$ ，再算 $40\times30=1200$ ，將兩步驟算式寫成併式紀錄時，先算的部分沒有加上（ ），很容易寫成 $45-5\times30$ ，如學生會選答錯誤②的情形。
4. **逐次減項的紀錄過程有誤，但最後答案正確**：以 $(45-5)\times30\div2$ 為例，學生的作法： $(45-5)\times30\div2=40\times30=1200\div2=600$ ，可以發現學生在第二步驟寫 40×30 時，卻沒繼續寫出 $\div2$ 。

(三) 核心概念的教學重點

多步驟的問題情境下，學生要從過去經驗的解題策略，進展到能用一個併式表示題意，其教學的順序如下：

- (1) 教師設計三步驟情境問題，帶領學生理解題意後，能夠解決三步驟問題。
- (2) 能用一個併式，記錄三步驟問題的解題活動，並認識「括號先算」、「先乘除後加減」及「由左往右算」運算次序的約定。
- (3) 能先列式，再用逐次減項的記法記錄三步驟問題的解題過程。

舉例 1：「小明口袋有 1 個 10 元硬幣和 6 個 5 元硬幣，請問小明共有多少元？」學生理解題意後多步驟解題算式可能為： $6\times5=30$ ， $10+30=40$ ；引導學生併式為 $10+6\times5=(\quad)$ ，再討論因為乘或除是連加或連減的簡化紀錄形式，因此運算位階高於

加或減，所以約定「先乘除後加減」。括號先算也是利用併式需求而產生的共同約定算則。

舉例 2：生活情境問題：「媽媽買了一盒巧克力禮盒，哥哥每天吃 4 顆巧克力，妹妹每天吃 3 顆巧克力，兩人連續吃了 5 天後，禮盒裡還剩下 15 顆巧克力，一盒巧克力禮盒總共有多少顆巧克力？」，學生有可能三步驟問題的解法：

$$\begin{aligned}4 \times 5 &= 20 \\3 \times 5 &= 15 \\20 + 15 + 15 &= 50.\end{aligned}$$

引導學生寫成一個併式 $(4 \times 5) + (3 \times 5) + 15$ ；用逐次減項的記法紀錄三步驟問題的解題過程 $(4 \times 5) + (3 \times 5) + 15 = 20 + 15 + 15 = 35 + 15 = 50$ 。

先讓學生有三步驟問題解題成功的經驗，再討論用併式記錄三步驟問題的解題活動；當學生有一些併式紀錄的經驗，再要求學生用併式列出三步驟問題的算式，並利用逐次減項的記法記錄解題活動。

(四) 本題教學的加強重點：

1. 教師帶領學生理解題意後，進行解題活動

師：「一杯飲料多少元？」

生：「一杯飲料 45 元。」

師：「一杯便宜多少元？」

生：「一杯便宜 5 元。」

師：「便宜後，一杯飲料多少元？怎麼算？」

生：「 $45 - 5 = 40$ ，一杯飲料 40 元。」

師：「一共訂了多少杯？」

生：「訂 30 杯。」

師：「一杯飲料 40 元，共訂 30 杯，總共要花多少元？怎麼算？」

生：「 $40 \times 30 = 1200$ ，總共要花 1200 元。」

師：「全部的費用由多少人平均分攤？」

生：「由 2 人平均分攤。」

師：「那 1 人平均付多少元？怎麼算？」

生：「 $1200 \div 2 = 600$ ，1 人平均付 600 元。」

2. 引導學生寫成一個併式

整理上述學生可能的多步驟解題算式為： $45 - 5 = 40$ ， $40 \times 30 = 1200$ ， $1200 \div 2 = 600$ 。引導學生併式為 $(45 - 5) \times 30 \div 2 = (\quad)$ ，建議教師針對這個併式討論為什麼需要括號。

如果學生理解題意後列出的錯誤併式為 $(45 - 5 \times 30) \div 2$ 時，針對括號

內 $45-5\times 30$ 這個算式要再釐清一次哪一部分要先算，因為 $45-5$ 要先算所以需要括號，此時就能突顯出括號的需求和意義。

學生也有可能列出的錯誤併式為 $45-5\times 30\div 2$ ，學生以為這樣的併式能記錄題意，教師提問這個算式依照四則運算規約，哪一個部分會先算？如果是 5×30 這個算式會先算，這與我們原本理解的題意是一樣的嗎？教師透過提問使學生建立如何在併式中應用四則運算規約。

建議教師可以展示學生的兩種做法：「一個有括號，另一個沒有括號。」讓學生分組討論探究、釐清概念。

(五) 其他

1. **多舉例需要括號的生活情境題**：以 104 年台北市建構反應題為例，「爸爸買了兩顆西瓜，分別重 8 公斤和 10 公斤，他一共付了 432 元，西瓜 1 公斤賣多少元？」學生可能的錯誤寫法： $432\div 8+10=$ ，加以釐清哪裡需要先計算，此部分要加上括號。教師可以提問「你是想要先計算 $432\div 8$ ，還是 $8+10$ ？」，也可以列式出來，請學生討論哪裡不合理。
2. **學生自行「擬題」**：教師可以給學生四則混合運算的式子，讓學生自行設計題目，以檢驗學生是否確實理解四則混合計算的規約。

第 18 題

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-n-07 能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。																														
題目	下列哪一個分數小於 $\frac{4}{8}$ ？ ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{5}{7}$ ③ $\frac{3}{9}$ ④ $\frac{16}{32}$																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：3</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.13</td><td>0.08</td><td>0.68</td><td>0.11</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.01</td><td>0.02</td><td>0.95</td><td>0.02</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.28</td><td>0.15</td><td>0.37</td><td>0.20</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：3	選項率	0.13	0.08	0.68	0.11	0.00		高分組	0.01	0.02	0.95	0.02	0.00		低分組	0.28	0.15	0.37	0.20	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：3																									
選項率	0.13	0.08	0.68	0.11	0.00																										
高分組	0.01	0.02	0.95	0.02	0.00																										
低分組	0.28	0.15	0.37	0.20	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.58，通過率為 0.68，試題難易度 0.66。

(二) 評量目標說明

本題是比較異分母分數大小的題目，要求學生能用通分的方式進行異分母分數的大小比較，評量學生是否具備異分母分數大小比較的能力。

(三) 選項表現說明

- 有 68% 的學生選擇正確選項③，顯示約近七成的學生已經掌握分數比較大小的能力。
- 有 13% 的學生選擇①，這些學生可能沒看清楚是要找比 $\frac{4}{8}$ 小的分數，也有可能學生不清楚分數的概念，以為分子和分母都比 4 和 8 小，而誤以為值比較小。

3. 有 11% 的學生選擇④，這些學生可能不清楚分數的概念，而沒有看出 $\frac{16}{32}$ 剛好是一半，和題目的 $\frac{4}{8}$ 是一樣大。
4. 有 8% 的學生選擇②，這些學生可能沒看清楚是要找比 $\frac{4}{8}$ 小的分數，也有可能學生不清楚分數的概念，而不能直接判斷 $\frac{5}{7}$ 已經超過一半，就是比 $\frac{4}{8}$ 大的分數，也有可能不會應用通分方式來比較異分母分數大小。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計為主要希望了解學生，對於「比較異分母分數的大小」，此一概念是否完全清楚。因此，在題目中設計「 $\frac{4}{8}$ 」這個分數的值是一半，也就是 $\frac{1}{2}$ ，而要學生選擇小於 $\frac{4}{8}$ 的分數，從學生的評量表現發現學生未能掌握分數的概念而判斷錯誤，又或者無法藉由通分的方式去得到結果。
2. 本題難易度為 0.66。有將近七成的學生能掌握分數比較大小的概念，但仍有三成多的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，95% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 37% 回答正確。其中低分組有 28% 學生選擇①，顯示有不少低分組的學生很容易採用錯誤策略「兩個分子比較大小，兩個分母比較大小」來判斷分數誰大誰小；低分組有 20% 學生選擇④，顯示也有不少低分組的學生很有可能看不懂「小於」的意義，以為要找比 $\frac{4}{8}$ 大的分數，再加上採取前述錯誤策略判斷（ $16 > 4$ ， $32 > 8$ ）；低分組有 15% 學生選擇②，顯示有少部分低分組的學生採用錯誤策略「只比較分母的大小」來判斷分數誰大誰小。從低分組學生的表現，皆說明了分數的基本概念不足，因而產生了錯誤的解題策略。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-07 能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。

(二) 先備的知識

1. 5-n-04 能理解因數和倍數。
2. 5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。
3. 5-n-06 能用約分、擴分處理等值分數的換算。

(三) 延伸的知識

1. 5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。
2. 5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。

十二年國教課綱（學習內容）（草案，送部版）**（一） 評量重點**

N-5-4 **異分母分數**：用約分、擴分處理等值分數並做比較。用通分做異分母分數的加減。養成利用約分化簡分數計算習慣。

（二） 先備的知識

N-5-3 **公因數和公倍數**：因數、倍數、公因數、公倍數、最大公因數、最小公倍數的意義。

（三） 延伸的知識

1. N-5-5 **分數的乘法**：整數乘以分數、分數乘以分數的意義。知道用約分簡化乘法計算。處理乘積一定比被乘數大的錯誤類型。透過分數計算的公式，知道乘法交換律在分數也成立。
2. N-5-6 **整數相除之分數表示**：從分裝（測量）和平分的觀點，分別說明整數相除為分數之意義與合理性。
3. N-5-7 **分數除以整數**：分數除以整數的意義。最後將問題轉化為乘以單位分數。

三、 教學建議**（一） 評量核心概念**

簡單異分母分數大小比較的問題。

（二） 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. **等分的概念不足**：學生可能知道一半就是分成兩部分，但沒有等分的概念。因此在處理部分/全體的問題時，會有錯誤的迷思。例如：將 $\frac{1}{4}$ 張色紙著色，很有可能因為沒有等分的概念，而犯了如【圖 18-1】的錯誤。

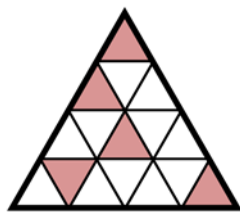


【圖 18-1】

2. **缺乏單位量的概念**：單位量是指我們把什麼當作 1，學生要先學會確認什麼是「1」，否則常會產生如以下舉例的迷思概念。從中我們能發現學生無法指認問題中的單位量、只考慮到問題中的分子（分割後的量）及分母（總分割份數），並且解題過程深受分子、分母的影響。

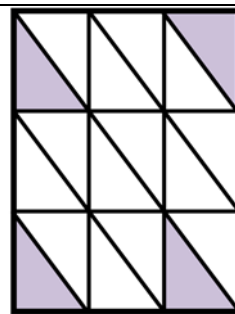
- （1） 1 個平分成 8 份的披薩，取其中 2 份披薩，學生誤以為取 $\frac{1}{2}$ 個披薩可看出學生誤把部分量當成全體量，寫在分數的分母。

- （2） 「如【圖 18-2】、【圖 18-3】中塗色部分佔圖形的幾分之幾？」



答： $\frac{11}{5}$

【圖 18-2】

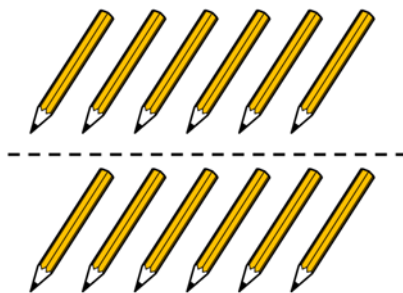


答： $\frac{4}{14}$

【圖 18-3】

學生無法將整個圖形當作單位量，而將圖形看成塗色部分和空白部分的比較結果。

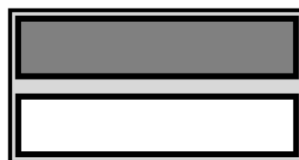
- (3) 「一盒鉛筆有 12 枝，如【圖 18-4】，哥哥用掉全部的 $\frac{1}{2}$ ，問用掉幾枝鉛筆？」



【圖 18-4】

學生可能會受到分數符號 $\frac{1}{2}$ 中的分子的影響回答 1 枝，也可能受到分母的影響回答 2 枝。

- (4) 「一盒巧克力有 2 條，小華吃掉 $\frac{1}{2}$ 盒，請用筆把小華吃掉的部份著顏色」，如【圖 18-5】的情形。



【圖 18-5】

3. 分數加法運算的常見錯誤

(1) 分子加分子、分母加分母： $\frac{2}{5} + \frac{3}{6} = \frac{2+3}{5+6} = \frac{5}{11}$ 。

(2) 分母相乘、分子相加： $\frac{2}{5} + \frac{3}{6} = \frac{2+3}{5 \times 6} = \frac{5}{30}$ 。

$$(3) \quad \text{分母相乘、分子相乘：}\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{3\times 2}{5\times 7}=\frac{6}{35}。$$

4. 分數減法運算的常見錯誤

$$(1) \quad \text{整數減整數、分子減分子、分母減分母：}3\frac{4}{6}-1\frac{3}{4}=2\frac{1}{2}。$$

$$(2) \quad \text{分母通分後，分子卻用多的減少的：}3\frac{4}{6}-1\frac{3}{4}=3\frac{16}{24}-1\frac{18}{24}=\\ (3-1)+(\frac{18}{24}-\frac{16}{24})=2\frac{2}{24}=2\frac{1}{12}。$$

$$(3) \quad \text{分母相乘當作通分分母，分子卻忘了擴分：}3\frac{4}{6}-1\frac{3}{4}=2\frac{1}{24}。$$

5. 分數大小比較的常見錯誤

(1) **同分子分數的大小比較：**學生很容易以為分母越大其值越大，例如學生會認為 $\frac{3}{8}>\frac{3}{5}$ ，是因為分母 $8>5$ 的關係。

(2) **異分母、異分子分數的大小比較：**可能受到分母的影響，只比較分母的大小，認為分母愈大，分數就愈大；也有可能受到分子的影響，認為分子愈大，分數就愈大。以上學生會受到分母和分子單一因素的影響。例如：學生會因為 $3<6$ 以及 $5<10$ ，而認為 $\frac{3}{5}<\frac{6}{10}$ 。

(三) 核心概念的教學重點

學生需掌握正確的分數概念，才能進行有意義的分數運算。以下將分數概念的教學到分數加減運算的教學，依序說明如下：

1. **認識單位分數：**單位分數指的是分子是1，分母是正整數的真分數，例如： $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、……。單位分數的意義是將基準單位量等分割成數份後所取出其中的一份。它是學習分數加減乘除運算的先備基礎概念，因此建構單位分數非常重要。例如：當學生知道 $\frac{3}{8}$ 是3個 $\frac{1}{8}$ 合起來的，那麼就能合理解釋「 $\frac{2}{8}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$ 」，而不會出現 $\frac{5}{16}$ 的迷思概念；延伸到學習「分數 \times 整數」時，就能理解「 $\frac{2}{7}\times 3=\frac{6}{7}$ 」，知道 $\frac{2}{7}$ 就是「2個 $\frac{1}{7}$ 」，「2個 $\frac{1}{7}$ 的3倍就是6個 $\frac{1}{7}$ 」，合起來就是 $\frac{6}{7}$ ，也就不會出現 $\frac{6}{21}$ 的迷思概念。所以，單位分數是建立分數起始的一個很重要的概念，明白單位分數才能在分數計算學習上做有意義的解釋。

2. 認識通分的意義

(1) **通分的定義：**通分是指把不同分母的分數，轉換成同分母分數的過程。

(2) **通分的目的**

甲、**大小比較**：透過大小比較活動，學生察覺當兩分數的分母相同（具有相同的單位分數）時，可以直接利用它們的分子決定大小；但是當兩分數的分母不同時（具有不同的單位分數），就無法直接透過分子決定大小，引發學生需要將異分母分數化為同分母分數的需求（計數的單位分數變成相同），此時才能依照分子決定大小。

乙、**計算**：以此為先備經驗，進入異分母分數的加減計算，也會遇到相同的問題—不同的單位分數，表示不同大小的計數單位，也有化為同分母分數的需求。

(3) **通分的方法**：為先求出各分母的公倍數，然後利用擴分將各分數化為分母為公倍數的等值分數。

3. 分數的大小比較：

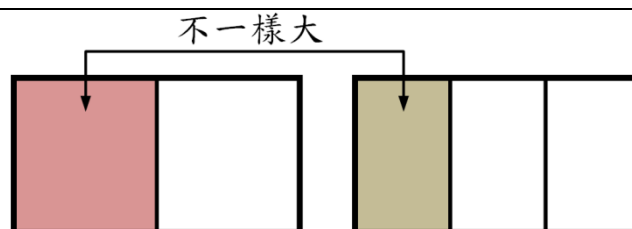
(1) **同分母分數的大小比較**：帶分數的大小比較，可以先比整數部分，整數部分大者，整個分數的值就大。若當整數部分相同，就直接比較分數部分的大小。例如： $5\frac{1}{8}$ 和 $3\frac{7}{8}$ 比較大小，發現 $5 > 3$ ，得到 $5\frac{1}{8} > 3\frac{7}{8}$ ，不需再比較 $\frac{1}{8}$ 和 $\frac{7}{8}$ 。

(2) **異分母分數的大小比較**：同樣的單位量，分割的份數不一樣多，也就是每一份不一樣大，所以不能直接比較，必須透過通分。例如： $\frac{3}{5}$ 條蛋糕和 $\frac{4}{7}$ 條蛋糕，誰比較多？藉由通分將分母變成一樣（也就是將計數的單位分數變成相同）， $\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$ ， $\frac{4}{7} = \frac{20}{35}$ ，因為 $\frac{21}{35} > \frac{20}{35}$ ，所以 $\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$ 。

4. 異分母分數的加減：

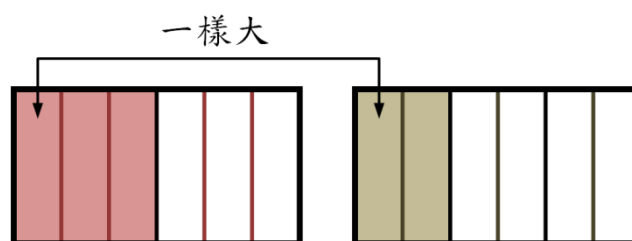
做一般異分母分數之比較與加減時，必須利用約分與擴分，將兩異分母的分數通分成為兩同分母之等值分數後，再做比較與加減。教師別太快進入公式算則，多一些概念性知識的教學，讓學生有充分的時間探索與思考，共同發現：因為兩個分數等份的份數不同，每份不一樣大，所以不能直接將份數相加，因此，要先通分，把它再等分成相同的份數，讓它變成每小份一樣大，才可以將份數相加。例如：有兩條相同的蛋糕，其中一條蛋糕哥哥吃了 $\frac{1}{2}$ 條，另一條蛋糕弟弟吃了 $\frac{1}{3}$ 條，他們共吃了幾條蛋糕？

教師可引導學生思考，如何將計數的單位分數變成一樣大小呢？可以在圖上做切割讓其計數的單位大小變成一樣大。首先，哥哥吃的蛋糕是平分成2塊，弟弟是平分成3塊，如【圖 18-6】。



【圖 18-6】

但是哥哥的 1 塊蛋糕和弟弟的 1 塊蛋糕不一樣大，所以接下來的目標是要將他們的分割後的蛋糕都要變成一樣大，所以要把哥哥的每 1 塊蛋糕在平分成 3 小份（變成 6 小份中的 3 小份），弟弟的每 1 塊蛋糕平分成 2 小份（變成 6 小份中的 2 小份），這時候哥哥和弟弟的蛋糕最後的切割份數都是 6 小份，如【圖 18-7】，且每小份都一樣大，因此就可以用同分母分數的加減概念進行相加減了。



【圖 18-7】

整個分數運算的過程： $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$ 。先透過情境題去理解異分母分數加減的計算概念，讓學生形成異分母分數加減的計算規則，教師幫助學生熟練程序性知識，即是所謂的分母不同的分數相加（減）時，先通分化為同分母分數，再相加（減）。

5. **帶分數的加減法：**帶分數的加減法則較為繁複，因為它牽涉到整數的加減法則，亦牽涉到分數的加減法則，尤其在分數不夠減的情況之下，運算更為繁複。例如： $5\frac{2}{3} - 3\frac{6}{7}$ ，所以必須先將 $5\frac{2}{3}$ 轉換成 $4\frac{5}{3}$ ，整數部分的計算為 $4 - 3$ ，分數部分的計算是 $\frac{5}{3} - \frac{6}{7}$ 。
6. **計算的流暢性：**學生對於計算常會採取算則（已建立的口訣或公式）進入機械式的運算，而沒有進行理解性的運算。例如題目 $\frac{9}{8} + \frac{7}{6}$ ，一般學生看到題目沒有思考更適當的策略就會直接採取算則，用通分的方法算出答案， $\frac{9}{8} + \frac{7}{6} = \frac{9 \times 3}{8 \times 3} + \frac{7 \times 4}{6 \times 4} = \frac{54}{48} + \frac{56}{48} = \frac{110}{48} = 2\frac{14}{48}$ ，這樣的計算顯得繁雜又容易算錯。若能先觀察題目中的分數，會發現假分數可以先轉換成帶分數，就能簡化計算過程，如 $\frac{9}{8} + \frac{7}{6} = 1\frac{1}{8} + 1\frac{1}{6} = 2 + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = 2\frac{14}{48} = 2\frac{7}{24}$ 。

（四）本題教學的加強重點

本題的教學重點是分數的等量的概念，和利用通分來做分數大小的比較。

1. 建立學生對於分數的量感： $\frac{4}{8}$ 是一半也就是 $\frac{1}{2}$ ； $\frac{16}{32}$ 是一半也就是 $\frac{1}{2}$ 。教師留意學生是否理解「一半」是 $\frac{1}{2}$ 。以 $\frac{1}{2}$ 為基準： $\frac{2}{3}$ 比一半多、 $\frac{5}{7}$ 比一半多，而 $\frac{3}{9}$ 比一半少。
2. 利用通分來做分數的大小比較： $\frac{4}{8}$ 和 $\frac{2}{3}$ 比較大小、 $\frac{4}{8}$ 和 $\frac{5}{7}$ 比較大小、 $\frac{4}{8}$ 和 $\frac{3}{9}$ 比較大小、 $\frac{4}{8}$ 和 $\frac{16}{32}$ 比較大小。

第 19 題

知識向度	數與計算	認知向度	程序執行																												
對應分年細目	5-n-04 能理解因數和倍數。																														
題目	五年級學生全部有 234 人，要進行分組，每組人數相同且剛好全部分完，五年級的學生 <u>不可能</u> 是幾個人一組？ ① 13 人 ② 26 人 ③ 38 人 ④ 78 人																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：3</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.17</td><td>0.08</td><td>0.64</td><td>0.11</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.05</td><td>0.02</td><td>0.91</td><td>0.01</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.28</td><td>0.14</td><td>0.37</td><td>0.22</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：3	選項率	0.17	0.08	0.64	0.11	0.00		高分組	0.05	0.02	0.91	0.01	0.00		低分組	0.28	0.14	0.37	0.22	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：3																									
選項率	0.17	0.08	0.64	0.11	0.00																										
高分組	0.05	0.02	0.91	0.01	0.00																										
低分組	0.28	0.14	0.37	0.22	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.55，通過率為 0.64，試題難易度 0.64。

(二) 評量目標說明

本題是因數問題，評量學生在具體情境中，理解因數的定義與概念並利用除法來判斷因數。

(三) 選項表現說明

- 有 64% 的學生選擇正確選項③，顯示有六成四的學生已經掌握題意要找 234 的因數並且知道可用整數除法的方法來判斷 234 的因數。
- 有 17% 的學生選擇①，這些學生可能沒有看清楚題意要答不可能的分組人數，而選擇可以整除 234 的人數。
- 有 11% 的學生選擇④，這些學生可能沒有看清楚題意要答不可能的分組人數，而選擇可以整除 234 的人數。
- 有 8% 的學生選擇②，這些學生可能沒有看清楚題意要答不可能的分組人數，而選擇可以整除 234 的人數。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計為主要希望了解學生，對於「具體的情境中，學生要知道要找因數並且利用除法來判斷因數」，此一概念是否完全清楚。因此，在題目中特別強調「每組人數相同」、「剛好分完」，求問每組人數是多少，學生能理解題意是要求因數，而且能整除 234 的整數都是它的因數，而不能整除 234 的整數就不是它的因數。
2. 本題難易度為 0.64。有將近七成的學生能掌握在具體情境中，了解題意要找因數，而且會判斷哪一個整數是 234 的因數，但仍有三成多的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，91% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 37% 回答正確，有 63% 的低分組學生對於找因數概念並未充分掌握好，而不清楚「是否整除 234」是本題找答案的關鍵因素。因此從低分組的學生表現能進一步得知，學生學習因數會遇到的困難有可能對情境題的內容不理解，完全不知從何下手；也有可能學生看懂題意，但對除法的計算能力不熟練，又或者只是單純沒留意題目要選擇「不可能的人數」。

二、教材地位分析**97 課綱（分年細目）****(一) 評量重點**

5-n-04 能理解因數和倍數。

(二) 先備的知識

1. 2-n-06 能理解乘法的意義，使用 \times 、 $=$ 做橫式紀錄與直式紀錄，並解決生活中的問題。
2. 3-n-05 能理解除法的意義，運用 \div 、 $=$ 做橫式紀錄（包括有餘數的情況），並解決生活中的問題。

(三) 延伸的知識

5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。

十二年國教課綱（學習內容）（草案，送部版）**(一) 評量重點**

N-5-3 公因數和公倍數：因數、倍數、公因數、公倍數、最大公因數、最小公倍數的意義。

(二) 先備的知識

1. N-2-6 乘法：乘法的意義與應用。在學習乘法過程，逐步發展「倍」的概念，做為統整乘法應用情境的語言。
2. N-3-6 解題：乘除應用問題。乘數、被乘數、除數、被除數未知之應用解題。連結乘與除的關係。(R-3-1)

(三) 延伸的知識

1. N-6-1 **20 以內的質數和質因數分解**：小於 20 的質數與合數。2、3、5 的質因數判別法。以短除法做質因數的分解。
2. N-6-2 **最大公因數與最小公倍數**：質因數分解法與短除法。兩數互質。運用到分數的約分與通分。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

能求算因數與倍數。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. **專有名詞意義不清楚或概念混淆**：「整除與被整除」的意義和「因數與倍數」有何關係並不清楚；以因數的定義來說，對於「甲數能整除乙數」或「甲數能被乙數整除」的敘述中，誰除以誰，哪個是因數或哪個是倍數，分不清楚；因數與倍數是兩個互逆的概念，若甲是乙的因數，乙則是甲的倍數，學生難以理解甲、乙兩數之間的關係。
2. **認為數字大小與因數個數有關**：學生容易誤以為數字愈大，因數個數愈多。例如：判斷 49 和 12 誰的因數個數比較多？學生容易因為 $49 > 12$ ，得到 49 的因數個數比較多。
3. **找因數容易遺漏**：當數字較大又有很多因數時，會沒有耐心逐一尋找而會有遺漏，同時除法的計算能力不好也會受影響。例如：找出 72 的因數，會因為 72 數字比較大，容易遺漏幾個因數；另一種是出現 49 屬於比較刁鑽的數字，容易遺漏 7 這個因數。
4. **判別因數、倍數關係混淆**：混用其他倍數的判別法去判斷因數、倍數關係。例如：無法判別「4 的倍數」與「尾數是 4 的數的倍數」。

(三) 核心概念教學重點

1. 因數問題

幫助學生建立因數的概念，可以有以下教學布題：

- (1) 在長方形排列問題中，探討給定總量的長方形的可能排法：例如先給定一個總量（以 6 個和 12 個全等的小正方塊為例），要求學童將小正方塊排成長方形（不可排成中空），窮盡所有的排法，讓學童經驗給定總量長方形可以有不同的排法。

布題一：6 個全等的小正方塊，可以排列成怎樣的長方形？每排出一種長方形，就請學生將排法用乘法紀錄下來。可以排列成 1×6 、 2×3 、 3×2 、 6×1 ，共 4 種。

布題二：12 個全等的小正方塊，可以排出怎樣的長方形？可以排列成 1×12 、 2×6 、 3×4 、 4×3 、 6×2 、 12×1 ，共 6 種。

教師宣告：排列長方形邊上方塊的個數：「1、2、3、6」是 6 的「因數」，和「1、2、3、4、6、12」是 12 的「因數」。

- (2) 在等分除的情境中，給定總量要求學童回答可能的等分組方式，幫助學童掌握總量可以由哪些單位量組成的意義。

例如：透過問題「有 18 位小朋友，全部分組玩遊戲，每組的人數要一樣多，一組可以有多少位小朋友，分分看？」請學童使用除法算式紀錄解題過程。

$$18 \div \boxed{1} = \boxed{18}$$

$$18 \div \boxed{2} = \boxed{9}$$

$$18 \div \boxed{3} = \boxed{6}$$

$$18 \div \boxed{6} = \boxed{3}$$

$$18 \div \boxed{9} = \boxed{2}$$

$$18 \div \boxed{18} = \boxed{1}$$

透過詢問「18 除以 2，全部分完且沒有剩下，所以 2 是 18 的因數」，引入因數的意義。帶領學生探討 18 的因數有哪些時，將 18 當成被除數，依序除以 1、2、3、……、18，發現其中 1、2、3、6、9、18 皆可以被 18 整除，所以 1、2、3、6、9、18 都是 18 的因數。

教師多舉例類似情境題讓學生解題，從學生找因數記錄下來的除法算式中，帶領學生發現「 $m \div a = b$ 」和「 $m \div b = a$ 」兩個除法算式的記錄皆可以找到 a 和 b 兩個因數，因此，在列出除法算式紀錄解題的過程，我們可省略「 $m \div b = a$ 」這個除法算式。

2. 倍數問題

現階段的學生有比較多倍的問題的解題經驗，經常使用倍的語言，因此，透過乘法未知的乘法算式填充題「 $2 \times (\quad) = 10$ 」，這條式子的含意是 2 的 5 倍是 10，所以 10 是 2 的 5 倍，引入倍數的意義：「10 是 2 的 5 倍，所以 10 是 2 的倍數」。學生有能力求出某數的倍數，例如我們要探討 5 的倍數，即可用乘以正整數的方式引導學生算出 5 的 1 倍、2 倍、3 倍、……依序為 5、10、15……，而這些數即為 5 的倍數。

另外，在學過除法之後，老師們同樣可帶領學生以除法觀點來探討倍數的觀念，因為：被除數 \div 除數=商，所以在驗算的過程：被除數=商 \times 除數，因此，我們可以帶領學生探討：被除數也是商和除數的倍數。例如我們將 $18 \div 3 = 6$ 的除法算式進行驗算，即可發現 $18 = 3 \times 6$ ，其中 18 也是 3 和 6 的倍數。

要解決這些困難與迷思，建議教學前，檢視學生是否具備學習因數、倍數的先備經驗，即對於乘除法的意義並熟練乘除計算技能；於教學時，宜設計富有生活化、情境化的情境，尤其是學生曾有過的生活實例，讓孩子有真實情境可以理解因數與倍數的意義。當然也可透過電腦活動輔助學習教材，引導學生正確瞭解題意，用簡單易懂的文字來定義因倍數，且讓學生有操作具體物聯結因數與倍數意義的機會，及淑練學童運算的技巧以協助演算與意義的連結。

(四) 本題教學重點

就本題而言，有兩個教學重點：

1. 先帶領學生判斷這是找因數的問題，由題意了解什麼是「每組人數相同且剛好分完」，教師可以先了解學生是否掌握了總量（總人數 234 人）可以由哪些單位量（每組幾人）組成的意義。
2. 使用除法算式紀錄解題過程：

$$234 \div \boxed{1} = \boxed{234}$$

$$234 \div \boxed{2} = \boxed{117}$$

$$234 \div \boxed{3} = \boxed{78}$$

$$234 \div \boxed{6} = \boxed{39}$$

$$234 \div \boxed{9} = \boxed{26}$$

$$234 \div \boxed{13} = \boxed{18}$$

所以我們可以說 1、2、3、6、9、13、18、26、39、78、117、234 都是 234 的因數。

第 20 題

知識向度	數與計算	認知向度	程序執行																												
對應分年細目	5-n-11 能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。																														
題目	<p>下列哪一個直式紀錄是正確的？</p> <div><div><p>①</p>$\begin{array}{r} 31.55 \\ \times 500 \\ \hline 157.75 \end{array}$</div><div><p>②</p>$\begin{array}{r} 31.55 \\ \times 500 \\ \hline 1577500 \end{array}$</div><div><p>③</p>$\begin{array}{r} 500 \\ \times 31.55 \\ \hline 2500 \\ 2500 \\ 500 \\ 1500 \\ \hline 295.00 \end{array}$</div><div><p>④</p>$\begin{array}{r} 500 \\ \times 31.55 \\ \hline 2500 \\ 2500 \\ 500 \\ 1500 \\ \hline 15775.00 \end{array}$</div></div>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：4</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.10</td><td>0.11</td><td>0.05</td><td>0.73</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.03</td><td>0.05</td><td>0.01</td><td>0.91</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.18</td><td>0.17</td><td>0.10</td><td>0.55</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：4	選項率	0.10	0.11	0.05	0.73	0.00		高分組	0.03	0.05	0.01	0.91	0.00		低分組	0.18	0.17	0.10	0.55	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：4																									
選項率	0.10	0.11	0.05	0.73	0.00																										
高分組	0.03	0.05	0.01	0.91	0.00																										
低分組	0.18	0.17	0.10	0.55	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.36，通過率為 0.73，試題難易度 0.73。

(二) 評量目標說明

本題是小數乘法的直式計算題，要求學生能診斷小數乘法的直式紀錄，評量學生用直式處理小數乘法的計算能力。

(三) 選項表現說明

- 有 73% 的學生選擇正確選項④，顯示約七成多的學生已經能掌握用直式處理小數乘法的計算能力。
- 有 11% 的學生選擇②，這些學生可能沒看清楚題目是小數乘以整數的直式計算題，誤看作是整數乘以整數的直式計算題，而造成計算的結果沒有點上

小數點。

3. 有 10% 的學生選擇①，這些學生可能直接忽略乘數的個位和十位是 0，因此未將計算的結果紀錄下來，而造成最後要點上小數點時位置錯誤。
4. 有 5% 的學生選擇③，這些學生可能還未掌握用直式紀錄計算過程的位值概念，而將 500×31 的計算過程紀錄在錯誤的位置。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計為主要希望了解學生，對於「用直式處理小數乘法的計算」，此一概念是否完全清楚。因此，在題目中特別設計選項以檢視學生是否掌握直式計算的位值概念、小數點的位置、乘數的最小位值是 0 時的計算紀錄。
2. 本題難易度為 0.73。有七成多的學生能用直式處理小數乘法的計算，但仍有將近三成的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，91% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生有 55% 回答正確。其中低分組有 18% 學生選擇①，顯示學生對於乘數有數字「0」時，不清楚要怎麼做直式的計算紀錄。低分組有 17% 學生選擇②，顯示部分學生不了解小數點的意義，所以很容易忽略小數點的重要性。低分組 10% 學生選擇③，顯示部分學生在用直式計算小數乘法時，沒有建立位值概念。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）。

(一) 評量重點

5-n-11 能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。

(二) 先備的知識

1. 4-n-12 能用直式處理二位小數加、減與整數倍的計算，並解決生活中的問題。
2. 5-n-10 能認識多位小數，並做加減比較與加、減與整數倍的計算，以及解決生活中的問題。

(三) 延伸的知識

6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。

十二年國教課綱（學習內容）（草案，送部版）

(一) 評量重點

N-5-08 小數的乘法：整數乘以小數、小數乘以小數的意義。乘數為小數的直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。處理乘積一定比被乘數大的錯誤類型。

(二) 先備的知識

N-4-07 二位小數：位值單位「百分位」。位值單位換算。比較、計算與解題。用直式計算二位小數的加、減與整數倍。

(三) 延伸的知識

1. N-5-09 **整數、小數除以整數（商為小數）**：整數除以整數（商為小數）、小數除以整數的意義。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。能用概數協助處理除不盡的情況。熟悉分母為 2、4、5、8 之真分數所對應的小數。
2. N-6-04 **小數的除法**：整數除以小數、小數除以小數的意義。直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。處理商一定比被除數小的錯誤類型。

三、教學建議**(一) 評量核心概念**

小數乘以小數的問題（兩位小數）。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. **對乘數位值為 0 的乘法意義不了解**：乘數的位值有 0 時，學生對位值出現 0 在乘法計算上的意義不了解，因此在直式算式中不知如何紀錄，以致於其他位值的乘法計算結果的位值亦錯誤。例如： 23×4.05 的乘數十分位位值為 0，在乘法直式計算時忽略了 0 乘以 23 的紀錄，直接將 4 乘以 23 的結果紀錄在錯誤的位值造成答案錯誤（如下列直式）。

$$\begin{array}{r}
 23 \\
 \times 4.05 \\
 \hline
 115 \\
 92 \quad \longrightarrow \text{位值錯誤} \\
 \hline
 10.37
 \end{array}$$

2. **對小數沒有估算的數感**：因此學生對於兩數乘積的小數點位置沒有概念，以致於出現小數乘法直式計算結果中積的小數點位置錯誤（如下列直式）。

$ \begin{array}{r} 23 \\ \times 4.05 \\ \hline 115 \\ 920 \\ \hline 93.15 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 23 \\ \times 4.05 \\ \hline 115 \\ 920 \\ \hline 931.5 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 23 \\ \times 4.05 \\ \hline 115 \\ 920 \\ \hline 9.315 \end{array} $
小數點位置正確	小數點位置錯誤	小數點位置錯誤

3. **在小數乘法直式計算有個位對齊的迷思**：舊經驗小數的加減直式法則，學同記憶要個位對齊個位，但在學小數乘法的直式計算，卻要先不管小數點的位置，直接最右邊對齊，此時容易受到前面舊經驗的干擾。

(三) 核心概念的教學重點

1. **使用定位板**：進行小數的加減直式運算教學時應使用定位板，並強調位值的對齊，將被加（減）數及加（減）數的小數點對齊後進行加（減）計算，而小數的乘除計算則不強調位值的對齊。
2. **加強分數和小數的連結**：在進行小數教學時，應重視分數和小數的連結，因為小數是分數的另一種表達形式。所以用 $\frac{1}{10}$ 、 $\frac{1}{100}$ 、 $\frac{1}{1000}$ 的分數來學習小數，可以幫助學生理解 0.1、0.01、0.001 的小數概念，並連結兩者之間的關

連。

3. 小數乘法的小數點位置算則規約

- (1) 在進行小數的乘法計算教學時，先從整數乘以小數開始，例如： $23 \times 4.5 = 23 \times 4 + 23 \times 0.5 = 92 + 11.5 = 103.5$ ，讓學生對整數乘以小數倍有感覺，學生經由觀察可以發現整數乘以帶小數倍時，即是該數的整數倍加上該數的純小數倍。所以 23 的 4.5 倍，答案一定大於 23 的 4 倍，小於 23 的 5 倍。
- (2) 接著再進行小數乘以小數的教學，可以先將小數化為分數，透過分數乘法的計算法則，幫助學生理解小數乘以小數乘法直式算則解題的意義。例如： $2.3 \times 4.5 = \frac{23}{10} \times \frac{45}{10} = \frac{23 \times 45}{10 \times 10} = \frac{1035}{100} = 10.35$ 。在此連結分數乘法的計算過程中，教師可引導學生觀察發現兩個分子相乘後得到 1035，兩個分母相乘後得到 100，因此將分數的乘積換回小數時，小數點往左移 2 位，最後得到 10.35。這樣引入幫助學生建立小數乘以小數的乘積之小數點位置之算則規約。

$$\begin{array}{r} 2.3 \\ \times 4.5 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 23 \\ \times 45 \\ \hline 1035 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 2.3 \\ \times 4.5 \\ \hline 10.35 \end{array}$$

(列出直式) (算出 23×45 的乘積) (小數點往左移 2 位)

4. **培養小數估算的數感：**除了小數和分數的連結外，在進行小數教學時，另一個很重要的概念是培養小數的數感以進行積的估算，例如： 2.3×4.5 ，是 2.3 的 4 倍多，所以可以估算答案應大於 8，小於 12 左右。小數數感的估算，也可以幫助學生先以整數進行小數的乘除計算，再定出積或商的小數點位置，例如：將 2.3×4.5 當成 23×45 的整數相乘，乘積為 1035，因以小數估算 2.3×4.5 的積介於 8~12 之間，因此可知其積應為二位小數，故積為 10.35。

(四) 本題教學的加強重點

本題可以採取兩種不同的解題策略，其教學內涵說明如下：

1. 直式紀錄

- (2) 本題為整數乘以二位小數的直式紀錄，可視為整數乘以整數的乘法計算，乘積算出來後再依被乘數和乘數的小數位數總和，來決定小數點的位置。
- (3) 計算 31.55×500 時，可以先視為 3155×500 。乘數 500 的個位和十位（數字是 0）做直式計算時，不需要做如下左式紀錄，可直接紀錄為如下右式。

$$\begin{array}{r} 3155 \\ \times 500 \\ \hline 0000 \\ 0000 \\ 15775 \\ \hline 1577500 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3155 \\ \times 500 \\ \hline 1577500 \end{array}$$

教師不要直接告知此結果，而是可以讓學生自己主動發現。因此建議教師讓學生練習乘數為整百的小數乘法計算題型，教師問學生從這幾題的直式紀錄中，發現了什麼？發現乘數的個位和十位的數字皆是 0 時，直接寫兩個 0 在積的個位和十位的位置就可以了。

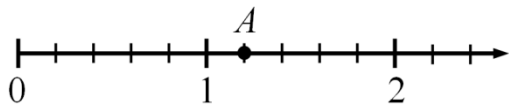
- (4) 計算 500×31.55 時，可以先視為 500×3155 。建議教師可以再複習整數乘法的直式算則，並與學生討論這些計算過程在如下直式紀錄時，寫在什麼位置才是合理的紀錄。

5 0 0	
× 3 1 5 5	
2 5 0 0	← 500×5 (個位的 5)
2 5 0 0	← 500×5 (十位的 5)
5 0 0	← 500×1 (百位的 1)
1 5 0 0	← 500×3 (千位的 3)
1 5 7 7 5 0 0	

2. 估算

本題由於是選擇題，所以只要用估算的策略就能輕易的找到正確答案，也就是計算 500×31.55 時，先把 31.55 估成 30，就可以做 500×30 的心算得到估算值 15000，而題目選項中就以④ 15775 和估測值 15000 最相近，故為本題答案。

第 21 題

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-n-13 能將分數、小數標記在數線上。																														
題目	<p>下面有一條數線，A 點的位置代表多少？</p> <div></div> <p>① 0.6 ② 1.1 ③ $1\frac{1}{6}$ ④ $1\frac{1}{5}$</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：4</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.04</td><td>0.29</td><td>0.05</td><td>0.62</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.01</td><td>0.06</td><td>0.01</td><td>0.92</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.07</td><td>0.52</td><td>0.09</td><td>0.32</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：4	選項率	0.04	0.29	0.05	0.62	0.00		高分組	0.01	0.06	0.01	0.92	0.00		低分組	0.07	0.52	0.09	0.32	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：4																									
選項率	0.04	0.29	0.05	0.62	0.00																										
高分組	0.01	0.06	0.01	0.92	0.00																										
低分組	0.07	0.52	0.09	0.32	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.61，通過率為 0.62，試題難易度 0.62。

(二) 評量目標說明

本題是分數小數數線問題，要求學生能依據數線的分段間隔數，將小數及分數標示在正確的位置上，評量學生是否具備判斷分數、小數在數線上對應位置的能力。

(三) 選項表現說明

1. 有 62%的學生選擇正確選項④，顯示約 6 成的學生已經掌握判斷小數及分數在數線對應位置的能力。學生能判斷 1 和 2 之間平分成 5 小格，因此 A 點位置的數值為 $1\frac{1}{5}$ 。

2. 有 29%的學生選擇②，這些學生可能受直尺每公分平分成 10 毫米的影響，

誤解數線間隔數必為 10 等分，A 點位置離 1 有 1 小格，因此以為 A 點數值為 1.1。

3. 有 5% 的學生選擇③，這些學生可能只點數原點到 A 點之間間隔數為 6 格，且小數與分數概念混淆，以為 A 點數值為 $1\frac{1}{6}$ 。
4. 有 4% 的學生選擇①，這些學生可能受直尺每公分平分成 10 毫米的影響，誤以為數線間隔數必為 10 等分，每 1 小格的值為 0.1。從原點開始到 A 點共 6 小格，因此認為 A 點數值為 0.6。

(四) 學生表現說明

1. 學生能正確判斷分數或小數在數線上的位置，或正確判斷數線上的位置所代表的小數值或分數值。小數是 10 進位制，分數卻不一定，學生在學習時若概念不清楚，容易產生混淆。因此本題旨在評量學生在數線上小數及分數的轉換概念是否清楚，並能正確標示。
2. 本題難易度為 0.62。有約六成的學生能掌握分數小數在數線上的轉換，但仍有約四成的學生無法正確解題。從高分組與低分組學生的表現來看，92% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 32% 答對。另有 52% 的低分組學生選擇②，顯示大多數低分組學生以為數線只能平分成 10 等分，而且並不了解數線等分間隔數與分數、小數的關係。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-13 能將分數、小數標記在數線上。

(二) 先備的知識

1. 3-n-09 能由長度測量的經驗來認識數線，標記整數值與一位小數，並在數線上做大小比較、加、減的操作。
2. 4-n-10 能將簡單分數標記在數線上。

(三) 延伸的知識

7-n-08 能理解數線，數線上兩線的距離公式，及能藉數線上數的位置驗證數的大小關係。

十二年國教課綱（學習內容）（草案，送部版）

(一) 評量重點

N-4-08 數線與分數、小數：連結分小數長度量的經驗。以標記和簡單的比較與計算，建立整數、分數、小數一體的認識。

(二) 先備的知識

N-3-11 整數數線：認識數線，含報讀與標示。連結數序、長度、尺的經驗，理解在數線上做比較、加、減的意義。

(三) 延伸的知識

N-7-05 數線：擴充至含負數的數線；比較數的大小；絕對值的意義；以 $|a-b|$ 表示數線上兩點 a 、 b 的距離。

三、教學建議

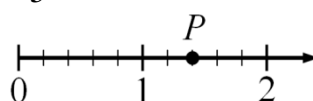
(一) 評量核心概念

能將數線上的值以分數、小數標示。（簡單分數與一位小數）

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

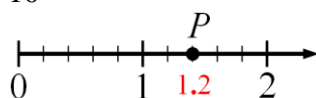
1. 誤認為數線間距必為 10 等分：以為兩數之間的數線等分間隔數一定是 10 等分，也就是每個間距為 $\frac{1}{10}$ 、0.1，忽略以其他分數表示的等分間隔數。例如

【圖 21-1】中點 P 值應為 $1\frac{2}{5}$ 或 1.4。

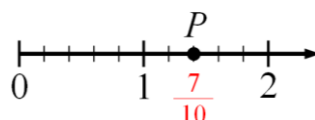


【圖 21-1】

但學生容易標示錯誤為 1.2，如【圖 21-2】；或以為全部數線平分為 10 等分，故標示為 $\frac{7}{10}$ ，如【圖 21-3】。



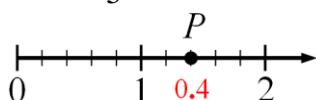
【圖 21-2】



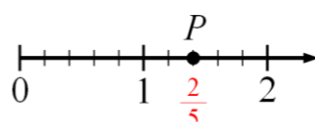
【圖 21-3】

2. 忽略數線上的整數值：學生在判斷數線等分間隔數後，在標示數值時容易只標示出分數或小數的值，因為學生習慣從 0 開始的數線，以致於忽略了帶分數或帶小數的整數值。例如【圖 21-1】中點 P 學生容易標示錯誤為 0.4，如

【圖 21-4】；或 $\frac{2}{5}$ ，如【圖 21-5】。

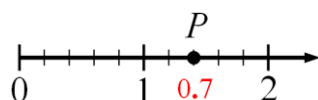


【圖 21-4】

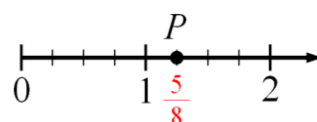


【圖 21-5】

3. 將數線全長當成 1 個單位：學生不了解數線上兩數間等距分割的意義。例如【圖 21-1】中點 P 學生以為在第 7 格就是 0.7，故標示為 0.7，如【圖 21-6】；或以為全部數線平分為 8 等分，故標示為 $\frac{5}{8}$ ，如【圖 21-7】。

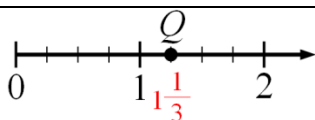


【圖 21-6】



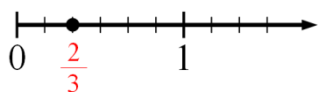
【圖 21-7】

4. 誤認為兩數之間分段處の間隔線數即為間隔數：學生只數兩數之間的分段間隔線數，導致數錯總間隔數。例如【圖 21-8】中點 Q 值應為 $1\frac{1}{4}$ ，學生以為 1 和 2 之間是 3 等分，所以標示為 $1\frac{1}{3}$ 。

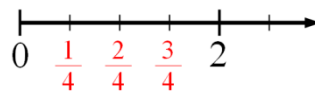


【圖 21-8】

5. **受分子或分母的影響**：學生因為對分數的概念不了解，所以在標示數線上的分數值容易受分子或分母的影響而錯誤。例如：請學生標示出 $\frac{2}{3}$ 的位置。因為學生對 $\frac{2}{3}$ 在數線上的意義不了解，看到分子 2 就以為要標示在第 2 格，因此只從分子判斷而誤標示在 $\frac{2}{6}$ 的位置上，如【圖 21-9】。另外，學生也可能沒有注意到數線的單位長為 2，只從分母判斷等分間隔數為 4，因此將 $\frac{1}{2}$ 、 $1\frac{1}{2}$ 誤標示為 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{2}{4}$ 、 $\frac{3}{4}$ ，如【圖 21-10】。



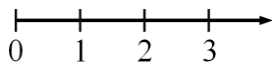
【圖 21-9】



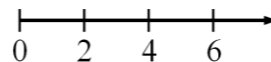
【圖 21-10】

(三) 核心概念的教學重點

1. **數線的基本概念**：數線的學習要從整數開始，小學常使用的導入情境為長尺（測量）。經由測量讓學生了解數線的基本性質，如以 0 為基準點（起點）、刻度上的數字代表從 0 開始的長度、數線具方向性、單位長度從 1 開始，如【圖 21-11】，但不同的數線單位長度不一定為 1，如【圖 21-12】數線的單位長度為 2。

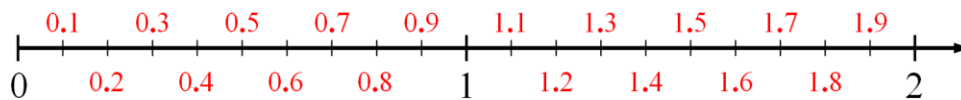


【圖 21-11】

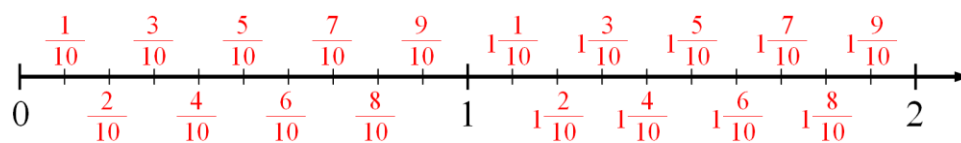


【圖 21-12】

2. **10 等分數線**：小數與分數的數線的教學可以從 10 等分開始，讓學生實際操作 10 等分的分段與數值標示，才容易理解數線等分的意義。10 等分後再讓學生練習 0.1、0.2、……，的數值標示，如【圖 21-13】，及小數與分數（以 10 為基底）的轉換標示，如【圖 21-14】。

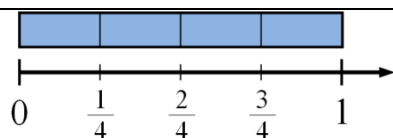


【圖 21-13】



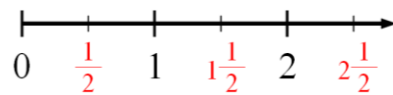
【圖 21-14】

3. **非 10 等分數線**：讓學生進行非 10 等分的間隔標示。可以結合長條形狀的等分練習，再連結到數線的分數標示，如【圖 21-15】。

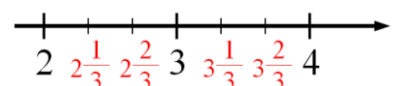


【圖 21-15】

接著練習在兩數之間進行分母為 2、3、4、5、……，等的等分練習與數值標示，如【圖 21-16】、【圖 21-17】。經由實際操作讓學生對於等分間隔的意義能了解，且更能具備等分間隔的數感。



【圖 21-16】



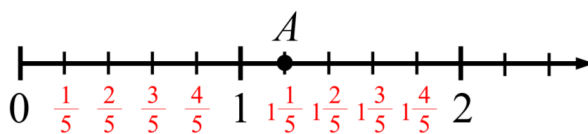
【圖 21-17】

4. **等分間隔數與分隔線的關係：**教師帶學生進行等分數線的操作時，可引導學生思考兩點之間，若要等分成 2 等分，需要 1 條間隔線；若等分成 3 等分，需要 2 條間隔線；若等分成 4 等分，則需要 3 條間隔線……依此類推。透過實際操作和歸因的思考，學生較能清楚等分間隔數和分隔線的關係，以及標示分數數值時，分母和等分間隔數的關係、分子和標示位置的關係。等分間隔數與分隔數的操作及觀察思考，還可連結至六年級植樹問題的解題思維。

(四) 本題教學的加強重點

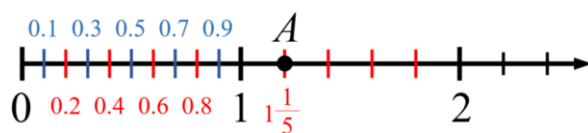
本題為非 10 等分數線，教師可先呈現 10 等分的數線，讓學生分別進行分數與小數的標示（如前述核心概念教學重點），讓學生理解 10 等分時，以 10 為基底的分數與小數的關係。

接著教師引導學生將數線進行如本題的 1 單位兩點之間的 5 等分切割，讓學生觀察共有 4 條分隔線，等分切割完再標示出每一個等分點的數值，如【圖 21-18】。

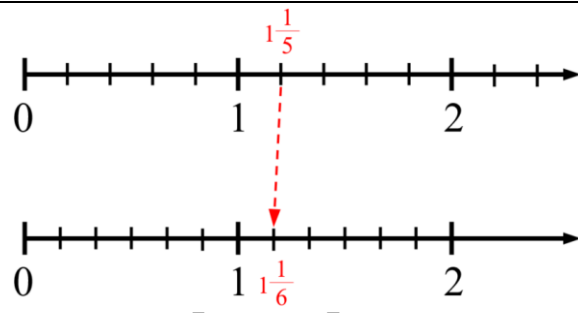


【圖 21-18】

本題其他三個錯誤選項也可以讓學生練習在數線上標示，用來和正確答案進行比較與澄清，如【圖 21-19】的 0.6 和 1.1、【圖 21-20】的 $1\frac{1}{6}$ 。



【圖 21-19】



【圖 21-20】

第 22 題

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-n-10 能認識多位小數，並做比較與加、減與整數倍的計算，以及解決生活中的問題。																														
題目	下列哪一個選項是正確的？ ① 0.90098>0.9098 ② 「15.0032」讀作「十五點零三二」 ③ 「0.23695」中的9是千分位 ④ $\frac{1}{16}$ 用小數表示是 0.0625																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：4</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.09</td><td>0.18</td><td>0.11</td><td>0.62</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.02</td><td>0.06</td><td>0.03</td><td>0.89</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.17</td><td>0.29</td><td>0.19</td><td>0.35</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：4	選項率	0.09	0.18	0.11	0.62	0.00		高分組	0.02	0.06	0.03	0.89	0.00		低分組	0.17	0.29	0.19	0.35	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：4																									
選項率	0.09	0.18	0.11	0.62	0.00																										
高分組	0.02	0.06	0.03	0.89	0.00																										
低分組	0.17	0.29	0.19	0.35	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.54，通過率為 0.62，試題難易度 0.62。

(二) 評量目標說明

本題是多位小數的基本概念題，評量學生是否能理解多位小數的數概念及其數詞序列，並能進行簡單分數與小數的換算。

(三) 選項表現說明

- 有 62% 的學生選擇正確選項④，顯示約六成的學生能理解多位小數的數概念及其數詞序列因此能判斷其他選項為非，並能進行簡單分數與小數的換算，正確計算 $\frac{1}{16} = 1 \div 16 = 0.0625$ 。
- 有 18% 的學生選擇②，這些學生可能受到整數概念的影響，以為多位小數的中間無論有幾個零，只要讀一個零即可，因此誤將「15.0032」讀作「十五點零三二」。
- 有 11% 的學生選擇③，這些學生可能誤解小數點右邊的第一個小數是個位，接下來依序為十分位、百分位、千分位，所以將 0.23695 的 9 當成千分位。

4. 有 9% 的學生選擇①，這些學生可能受到整數概念的影響，以為越長的多位小數其值越大，因此誤以為 $0.90098 > 0.9098$ 。

(四) 學生表現說明

1. 本題透過讓學生判斷正確的多位小數位值、讀法、比大小及簡單分數與小數的換算，以了解學生對多位小數概念的理解。
2. 本題難易度為 0.62，顯示約六成的學生對小數具有正確的基本概念，但仍有約四成的學生無法正確解題。從高分組與低分組學生的表現來看，89% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 35% 回答正確，另外 3 個錯誤選項均有很高的誘答率，可知低分組學生對小數沒有正確的基本認識，容易受到整數概念的影響而產生迷思和混淆。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-10 能認識多位小數，並做比較與加、減與整數倍的計算，以及解決生活中的問題。

(二) 先備的知識

4-n-11 能認識二位小數與百分位的位名，並做比較。

(三) 延伸的知識

1. 5-n-11 能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。
2. 5-n-12 能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算。
3. 5-n-13 能將分數、小數標記在數線上。
4. 6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。

十二年國教課綱（學習內容）（草案，送部版）

(一) 評量重點

N-5-1 十進位的位值系統：「兆位」至「千分位」。整合整數與小數。理解基於位值系統可延伸表示更大的數和更小的數。

(二) 先備的知識

1. N-4-7 二位小數：位值單位「百分位」。位值單位換算。比較、計算與解題。用直式計算二位小數的加、減與整數倍。
2. N-4-8 數線與分數、小數：連結分小數長度量的經驗。以標記和簡單的比較與計算，建立整數、分數、小數一體的認識。

(三) 延伸的知識

1. N-5-8 小數的乘法：整數乘以小數、小數乘以小數的意義。乘數為小數的直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。處理乘積一定比被乘數

大的錯誤類型。

2. N-5-9 整數、小數除以整數（商為小數）：整數除以整數（商為小數）、小數除以整數的意義。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。能用概數協助處理除不盡的情況。熟悉分母為 2、4、5、8 之真分數所對應的小數。
3. N-6-4 小數的除法：整數除以小數、小數除以小數的意義。直式計算。教師用位值的概念說明直式計算的合理性。處理商一定比被除數小的錯誤類型。

三、教學建議

（一）評量核心概念

多位小數的意義。

（二）學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 小數的基本概念迷思

- （1） 不了解小數與分數之間的連結，所以不清楚小數點右邊的數字所代表的值，例如：0.23 的 2 是 2 個 $\frac{1}{10}$ ，所以 2 是十分位；0.23 的 3 是 3 個 $\frac{1}{100}$ ，所以 3 是百分位。因此學生對小數的化聚容易產生混淆，如以為 2.5 是 2.5 個 0.1。
- （2） 不了解小數所代表的值，如不了解 3.45 是介於 3 和 4 之間的值。
- （3） 數線上讀小數或標小數點時，會弄錯兩格之間的單位，例如；0.1 和 0.2 之間分成十格時，不清楚兩小隔間代表的是 0.01。
- （4） 不了解小數之間存在著無限個小數，例如：0.1 和 0.2 之間有 0.01、0.02、0.03……；0.01 和 0.02 之間還有 0.001、0.002、0.003……。
- （5） 在度量衡單複名數的轉換問題時，易產生位值錯誤，例如：以為 2 公尺 3 公分=2.3 公尺。
- （6） 在離散量情境時，易將小數點左邊的數當成大單位的個數，將小數點右邊的數當成小單位的個數，例如：一袋糖果有 20 顆，2.5 袋糖果就是 2 袋又 5 顆。

2. 小數與整數概念混淆形成的迷思

- （1） 讀小數時，會類推讀整數的方式，例如；0.24 讀成「零點二十四」或 0.2007 讀成「零點二零七」。學生不理解讀整數時有讀出位名，故零可省略，而讀小數時沒有讀出位名，故零不可以省略。
- （2） 不了解小數點右邊末位的 0 可以省略，例如：以為 $12.30 > 12.3$ 。
- （3） 在小數數詞序列遇到進位時容易出錯，例如：0.8、0.9 再來是 0.10。
- （4） 在比較小數的大小時，以為小數點右邊的數字越多，其值越大，例如：以為 $0.123 > 0.4$ 。

(5) 在比較小數的大小時，將小數當成整數來比較，例如：以為 $12.3 < 4.56$ 。

(6) 在加減小數時會將數字靠右對齊：

$$\begin{array}{r} 0.54 \\ + 0.3 \\ \hline 0.57 \end{array}$$

(7) 在加減小數時計算結果忘了標示小數點：

$$\begin{array}{r} 2.54 \\ + 1.3 \\ \hline 267 \end{array}$$

3. 小數與分數概念混淆形成的迷思

(1) 將小數和分數的數字直接轉換，例如：以為 $5.4 = \frac{4}{5}$ ，或以為 $\frac{2}{3} = 2.3$ 。

(2) 在比較小數的大小時，以為小數點後的數字越多，其值越小，例如：以為 $4.32 < 4.3$ 。

(三) 核心概念的教學重點

1. 透過具體操作讓學生從分數概念引進，讓學生理解小數的意義

以千格板當作 1，一個百格板是 $\frac{1}{10}$ ，也就是 0.1；一個橘色積木是 $\frac{1}{100}$ ，也就是 0.01；一個小白積木是 $\frac{1}{1000}$ ，也就是 0.001。

學生在四年級已經認識二位小數與百分位的位名，且理解小數本身記錄了多單位的合成結果，例如一位小數是記錄數個「1」和數個「0.1」的合成結果；二位小數是記錄數個「1」、數個「0.1」和數個「0.01」的合成結果。

五年級開始出現四位小數以上的小數，四位小數是記錄數個 1，數個 0.1，數個 0.01，數個 0.001 和數個 0.0001 的合成結果，例如：0.3758 是記錄 3 個 0.1、7 個 0.01 和 5 個 0.001 的合成結果，展開式可以寫成 $0.3758 = 0.1 \times 3 + 0.01 \times 7 + 0.001 \times 5 + 0.0001 \times 8$ 。

2. 透過定位板讓學生觀察發現，能理解小數多單位位值和其大小的變化

整數位值越往左其值越大，數字往左移動一個位值，其值變為原來的 10 倍，反之往右移動一個位值，其值變為原來的 $\frac{1}{10}$ 倍。小數亦然，十分位的 1 代表個位 1 的 $\frac{1}{10}$ ，百分位的 1 代表十分位 1 的 $\frac{1}{10}$ 。

利用定位板，如【表 22-1】來輔助認識小數的位值和位名，以了解小數概念是整數十進位系統的延伸。

【表 22-1】

個 位	十 分 位	百 分 位	千 分 位	萬 分 位
0	3	7	5	8

以定位板理解「0.1」、「0.01」、「0.001」、「0.0001」四個單位間的化聚活動，例如一位小數問題：「一盒雞蛋有 10 個，1 個雞蛋是 0.1 盒。35 個雞蛋是幾個 0.1 盒？合起來是幾盒？」與「一盒雞蛋有 10 個，3.5 盒有幾個雞蛋？」的雙向化聚問題。

再到兩位小數問題：「一包影印紙有 100 張，1 張影印紙是 0.01 包，10 張影印紙是 0.1 包。76 張影印紙是幾個 0.01 包和幾個 0.1 包？」與「一包影印紙有 100 張，幾個 0.01 和幾個 0.1 包合起來是 0.76 包？」的雙向化聚問題。

再到三位小數問題：「一盒白色積木有 1000 個，1 個白色積木是 0.001 盒，10 個白色積木（即 1 個橘色積木）是 0.01 盒，100 個白色積木（即 1 個百格板）是 0.1 盒。468 個白色積木是由多少個 0.001 盒、多少個 0.01 盒和多少個 0.1 盒白色積木合起來的？」與「一盒白色積木有 1000 個，多少個 0.001 盒、多少個 0.01 盒（即 1 個橘色積木）和多少個 0.1 盒白色積木（即 1 個百格板）合起來是 0.468 盒？」的雙向化聚問題。

（四）本題教學的加強重點

本題應配合定位板加強學生小數位值的概念，如【表 22-2】及【表 22-3】，可先從整數的位值認識到小數的位值認識，讓學生理解越靠近個位或小數點的位值越大。再連結學生整數比大小的舊經驗：比大小時，先比比較大的位值。

【表 22-2】

個 位	十 分 位	百 分 位	千 分 位	萬 分 位	十 萬 分 位
0	9	0	0	9	8

【表 22-3】

個 位	十 分 位	百 分 位	千 分 位	萬 分 位	十 萬 分 位
0	9	0	9	8	

比大小時，從比較大的位值開始比，因此從表二及表三的定位板可以清楚看出來，兩數十分位及百分位皆相同，但 0.9098 的千分位為 9，比 0.90098 的千分位為 0 來得大，故 $0.90098 < 0.9098$ ，①錯誤。

在讀小數時，學生易受讀整數方式的影響，學生不理解讀整數時有讀出位名，故零可省略，而讀小數時沒有讀出位名，故零不可以省略。故將②的 15.0032 填入定位板中，如【表 22-4】，可以讀作「十五點零零三二」，兩個零不可以省略，0.003 和 0.0002 的位值才會正確。

【表 22-4】

十 位	個 位	十 分 位	百 分 位	千 分 位	萬 分 位
1	5	0	0	3	2

③的 9 是萬分位，不是千分位，如【表 22-5】。

【表 22-5】

個 位	十 分 位	百 分 位	千 分 位	萬 分 位	十 萬 分 位
0	2	3	6	9	5

④的 $\frac{1}{4} = 1 \div 4 = 0.25$ 或 $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$ ，提醒學生小數換成分數的方式。

第 23 題

知識向度	數與計算	認知向度	概念理解																												
對應分年細目	5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。																														
題目	下列哪一個算式的計算結果在 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{4}{6}$ 之間？ ① $\frac{4}{6} \times \frac{6}{4}$ ② $\frac{4}{6} \times \frac{4}{6}$ ③ $\frac{1}{3} \times \frac{4}{6}$ ④ $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：2</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.09</td><td>0.41</td><td>0.29</td><td>0.20</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.03</td><td>0.75</td><td>0.13</td><td>0.09</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.15</td><td>0.18</td><td>0.40</td><td>0.28</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：2	選項率	0.09	0.41	0.29	0.20	0.00		高分組	0.03	0.75	0.13	0.09	0.00		低分組	0.15	0.18	0.40	0.28	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：2																									
選項率	0.09	0.41	0.29	0.20	0.00																										
高分組	0.03	0.75	0.13	0.09	0.00																										
低分組	0.15	0.18	0.40	0.28	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.58，通過率為 0.41，試題難易度 0.46。

(二) 評量目標說明

本題是分數乘法題，評量學生對於分數乘法的概念是否了解，並能熟練其計算。

(三) 選項表現說明

1. 有 41% 的學生選擇正確選項②，顯示約四成的學生能經由乘數分數倍的大小來判斷積的值： $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ， $\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ ， $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times 1$ ，故 $\frac{1}{3} < \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} < \frac{2}{3}$ 。

方法二：另外，可能有些學生是經由計算來判斷積的值： $\frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = 1$ ， $\frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{9}$ ， $\frac{1}{3} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{9}$ ， $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ ，所以只有 $\frac{4}{9}$ 的值介於 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{4}{6} (= \frac{2}{3})$ 之間。

2. 有 29% 的學生選擇③，這些學生可能對分數乘法的意義或對題意不了解，而誤以為兩數相乘即為答案。

3. 有 20% 的學生選擇④，這些學生可能計算錯誤或計算正確但無法判斷其值是否在 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{4}{6}$ ($=\frac{2}{3}$) 之間，而選擇錯誤。
4. 有 9% 的學生選擇①，這些學生可能計算錯誤或對題意不了解，也可能計算正確但無法判斷其值是否在 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{4}{6}$ ($=\frac{2}{3}$) 之間。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計主要為了解學生對於分數乘以分數的意義是否了解，若學生能了解被乘數乘以分數倍對積的變化，則此題不需計算即能判斷正確答案。若學生沒有思考乘以分數倍的意義，也能透過分數乘法的計算找出正確答案，表示學生熟練分數乘法的運算。
2. 本題難易度為 0.46。有約四成的學生能正確計算或判斷分數乘法的積，但仍有超過五成的學生無法解題。從高分組與低分組學生的表現來看，75% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生卻只有 18% 回答正確。有高達 40% 的低分組學生選擇選項③，顯示學生對於分數乘法的基本概念並未充分掌握，以為兩數相乘就是答案。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。

(二) 先備的知識

4-n-08 能認識真分數、假分數與帶分數，熟練假分數與帶分數的互換，並進行同分母分數的比較、加、減與整數倍的計算。

(三) 延伸的知識

1. 5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。
2. 6-n-04 能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。

十二年國教課綱（學習內容）（草案，送部版）

(一) 評量重點

N-5-5 分數的乘法：整數乘以分數、分數乘以分數的意義。知道用約分簡化乘法計算。處理乘積一定比被乘數大的錯誤類型。透過分數計算的公式，知道乘法交換律在分數也成立。

(二) 先備的知識

N-4-5 同分母分數：一般同分母分數教學（包括「真分數」、「假分數」、「帶分數」名詞引入）。假分數和帶分數之變換。同分母分數的比較、加、減與整數倍。

(三) 延伸的知識

1. N-5-7 **分數除以整數**：分數除以整數的意義。最後將問題轉化為乘以單位分數。
2. N-6-3 **分數的除法**：整數除以分數、分數除以分數的意義。最後理解除以一數等於乘以其倒數之公式。

三、教學建議**(一) 評量核心概念**

分數乘以分數的問題。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念**1. 分數×整數**

- (1) 真分數×整數時，和擴分的算法混淆，將分子和分母同乘以整數，例如： $\frac{2}{3} \times 5 = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$ 。也有可能誤將分母乘以整數，例如： $\frac{2}{3} \times 5 = \frac{2}{3 \times 5} = \frac{2}{15}$ 。
- (2) 帶分數×整數時，只將帶分數的整數乘以倍數，例如： $1\frac{2}{3} \times 5 = 5\frac{2}{3}$ ；或只將帶分數的分子乘以倍數，例如： $1\frac{2}{3} \times 5 = 1\frac{10}{3}$ ；或誤將帶分數的整數、分子和分母全部乘以倍數，例如： $1\frac{2}{3} \times 5 = 5\frac{10}{15}$ 。

2. 整數×分數

- (1) 約分錯誤，誤將整數和分子約分，例如： $12 \times \frac{4}{5} = 12^3 \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$ 。
- (2) 受分數×分數的口訣「分子乘以分子，分母乘以分母」影響，誤將整數同乘以分母和分子，例如： $6 \times \frac{5}{7} = \frac{6 \times 5}{6 \times 7} = \frac{30}{42} = \frac{5}{7}$ ，結果計算的結果還是乘數 $\frac{5}{7}$ 。
- (3) 受整數乘法經驗影響，以為「乘積一定比被乘數大」。

(三) 核心概念教學重點

分數乘法的一般教學程序，依序是**分數乘以整數**、**整數乘以分數**，最後是**分數乘以分數**。分數的教學要先從生活情境切入，再透過具體物的操作讓學生理解分數乘法的概念及運算方式，最後再歸納成算則（公式）。否則學生背公式容易，卻不了解分數乘法的意義，容易產生迷思或混淆，以致計算錯誤。

教學活動要先複習四年級已經學過的真（假）分數的整數倍、單位分數的整數倍的題型，再進入到帶分數的整數倍的題型。分數計算的教學在一開始應輔以圖形表徵以幫助學生理解分數四則運算的概念。

1. 分數乘以整數（倍）

真（假）分數乘以整數（倍）教學，可以從三個不同的概念導入，一個是建立在分數的加法概念上，一個是從單位分數的觀點切入，另一個則是利用內容物的觀點來解釋，舉例說明如下：

「一包色紙有 54 張，一位小朋友分得 $\frac{2}{9}$ 包，3 位小朋友共分得幾包？」

(1) 以同分母分數的連加活動解題：題意是在問「3 個 $\frac{2}{9}$ 的和是多少？」

也可說成「 $\frac{2}{9}$ 的 3 倍是多少？」，因此，

$$\frac{2}{9} \times 3 = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2+2+2}{9} = \frac{2 \times 3}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}。$$

(2) 以單位分數為計數單位的方式解題： $\frac{2}{9}$ 是 2 個 $\frac{1}{9}$ ，「2 個 $\frac{1}{9}$ 」的 3 倍，

共是 2×3 個 $\frac{1}{9}$ ，6 個 $\frac{1}{9}$ 是 $\frac{6}{9}$ ， $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ 。所以，

$$\frac{2}{9} \times 3 = \frac{2 \times 3}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}。$$

(3) 算出單位分數內容物的解題策略：學生可以算出一位小朋友分得 $\frac{2}{9}$ 包就是 12 張，3 位小朋友共分得 36 張。而 36 張是把一包平分成 9 份中的 6 份，或把一包平分成 54 份中的 36 份，而得到的結果是 $\frac{6}{9}$ 包 = $\frac{36}{54}$ 包。在一開始接觸分數整數倍的情境題時，學生可以使用分數的原始意義和整數的乘法解題能力即可以進行解題。

(4) 布題討論：教師可以布不同的情境題給學生思考，再讓學生思考討論發現計算的法則，當分數乘以整數時，用整數去乘分數的分子得到的積當作新分子，而新分母仍是原分母： $\frac{b}{a} \times c = \frac{b \times c}{a}$

帶分數乘以整數，可以採用分配律的概念解題，例如：

$$9\frac{1}{5} \times 4 = 9 \times 4 + \frac{1}{5} \times 4 = 36 + \frac{4}{5} = 36\frac{4}{5}。$$

若學生將帶分數轉換為假分數處理計算，卻很可能讓計算過程複雜或分子數字很大而計算錯誤。

2. 整數×分數（倍）：這是學生第一次接觸「分數倍」，可以從整數倍的情境開始，再自然帶入不到 1 倍的「分數倍」情境，「分數倍」即是「 $\frac{\text{部分}}{\text{整體}}$ 」的概念。例如：「一盒糖果有 12 顆 $\frac{1}{4}$ 盒是幾顆？」、「 $\frac{2}{4}$ 盒是幾顆？」、「 $\frac{3}{4}$ 盒是幾顆？」，以引導學生思考：因為不到 1 倍，所以乘積會小於被乘數。

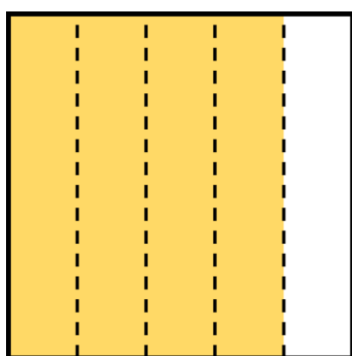
3. 分數×分數（倍）：同前面分數乘以整數倍問題的延伸，但是因為變成分數

倍，學生的理解變得困難。教師還可以利用「面積表徵」及「線段表徵」、字面意義的方式來幫助學生理解分數 \times 分數（倍）的概念，以引導學生發現「分母乘以分母，分子乘以分子」的算則。

(1) 面積表徵

以面積的圖象表徵來幫助學生理解分數乘以分數倍的概念。例如：
「一塊地有 $\frac{4}{5}$ 公畝，其中的 $\frac{2}{3}$ 種玉米，請問種玉米的部份是幾公畝？」

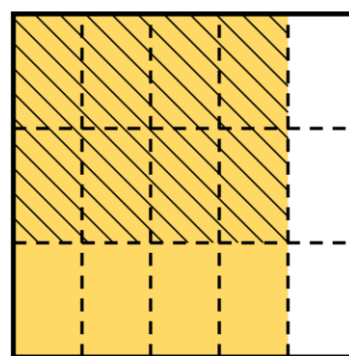
若把全部長方形面積當作 1 公畝，所以黃色部份面積即 $\frac{4}{5}$ 公畝，如【圖 23-1】，斜線部份種玉米： $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ 公畝，如【圖 23-2】，所以種玉米的部份是 $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$ 公畝。



全部面積：1 公畝

黃色部分： $\frac{4}{5}$ 公畝

【圖 23-1】

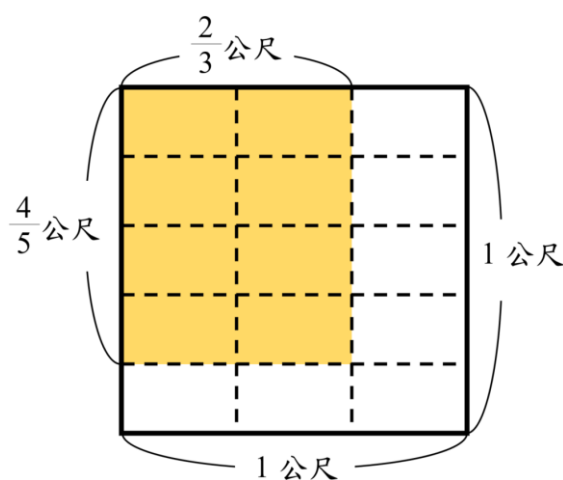


黃色部分： $\frac{4}{5}$ 公畝

斜線部分種玉米： $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ 公畝

【圖 23-2】

另一種面積表徵方式是在以邊長 1 公尺，面積為 1 平方公尺的正方形土地中，取一塊邊長只有 $\frac{4}{5}$ 公尺，及 $\frac{2}{3}$ 公尺的長方形土地，面積是多少平方公尺？

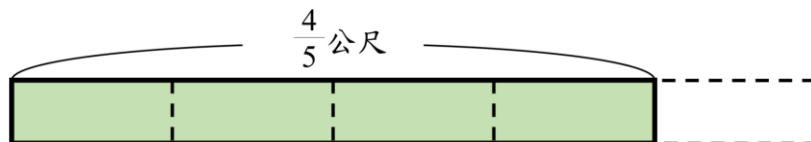


【圖 23-3】

如上【圖 23-3】，所以面積還是 $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$ （平方公尺）。

(2) 線段表徵

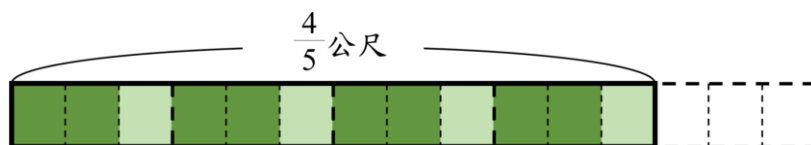
以線段的圖象表徵來幫助學生理解分數乘以分數倍的概念，例如：一條緞帶長 $\frac{4}{5}$ 公尺，如【圖 23-4】，剪下其中的 $\frac{2}{3}$ 做一個蝴蝶結，請問做蝴蝶結的緞帶長幾公尺？



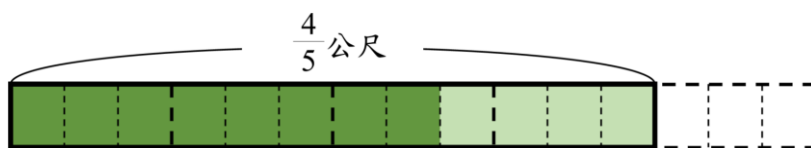
【圖 23-4】

每個 $\frac{1}{5}$ 皆取其中的 $\frac{2}{3}$ ，如【圖 23-5】，則做蝴蝶的緞帶長度即為深綠色長度的總和：

$$\left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{15}。$$



【圖 23-5】

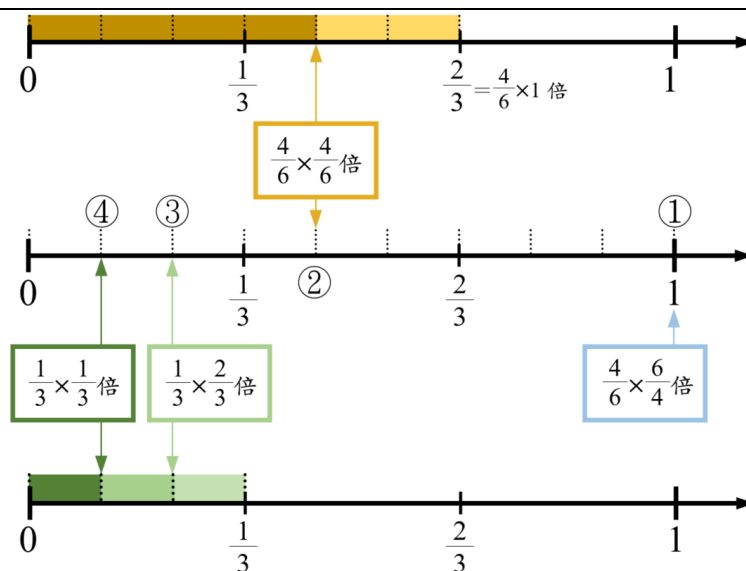


【圖 23-6】

所以深綠色部份的總長度為 $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$ 公尺，如【圖 23-6】。

(四) 本題教學的加強重點

本題的教學應著重引導學生思考判斷乘以分數倍對被乘數的影響，可輔以數線圖協助學生判斷，如【圖 23-7】：



【圖 23-7】

1. 引導學生思考 $\frac{4}{6} \times \frac{4}{6}$ 倍，其值應大於 $\frac{4}{6}$ 的 $\frac{1}{2}$ 倍 ($=\frac{1}{3}$)，小於 $\frac{4}{6}$ 的 1 倍 ($=\frac{2}{3}$) 也就是：

$$\begin{array}{ll} \frac{4}{6} \times \frac{1}{2} < \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} & \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} < \frac{4}{6} \times 1 \\ \frac{4}{6} \times \frac{1}{2} < \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} & \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} < \frac{4}{6} \times 1 \\ \frac{1}{3} < \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} & \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} < \frac{2}{3} \end{array}$$

故 $\frac{1}{3} < \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} < \frac{2}{3}$ ，數線上的位置介於 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{3}$ 之間。

2. 引導學生思考 $\frac{1}{3} \times \frac{4}{6}$ 倍，其值應小於 $\frac{1}{3} \times 1$ ，故在數線上位於 $\frac{1}{3}$ 的左邊。
3. 引導學生思考 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ 倍，其值應小於 $\frac{1}{3} \times \frac{4}{6}$ ，故在數線上位於 $\frac{1}{3} \times \frac{4}{6}$ 的左邊。

第 24 題

知識向度	數與計算	認知向度	解題思考				
對應分年細目	5-n-03 能熟練整數四則混合計算。						
題目	一個機器人模型賣 180 元，買 4 個機器人模型比買 6 輛汽車模型的價錢少了 30 元，一輛汽車模型賣多少元？ ① 90 元 ② 115 元 ③ 125 元 ④ 150 元						
答題表現 選項分析	-----						
	選 項	1	2	3	4	其他	答案：3

	選項率	0.14	0.38	0.35	0.12	0.00	

高分組	0.05	0.37	0.55	0.03	0.00		
低分組	0.22	0.32	0.22	0.23	0.00		

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.33，通過率為 0.35，試題難易度 0.39。

(二) 評量目標說明

本題是多步驟整數四則運算題，評量學生是否能理解題意並熟練進行整數加、減、乘、除的混合計算。

(三) 選項表現說明

- 有 35% 的學生選擇正確選項③，顯示只有不到四成的學生能夠理解題意，並能熟練整數加、減、乘、除的混合計算能力，故能正確計算： $(180 \times 4 + 30) \div 6 = 125$ （元）。
- 有 38% 的學生選擇②，這些學生可能將題目「4 個機器人模型比 6 輛汽車模型少了 30 元」誤以為「少了 30 元」就要用減的，因此把 $180 \times 4 = 720$ ，再把 $720 - 30 = 690$ ， $690 \div 6 = 115$ ，誤將汽車模型的錢算成 115 元。
- 有 14% 的學生選擇①，這些學生可能不了解「4 個機器人模型比 6 輛汽車模型少了 30 元」的意思，先算出 4 個機器人模型的錢： $180 \times 4 = 720$ 之後，沒有先加 30 元，而是先除以 6， $720 \div 6 = 120$ ，最後又誤解題意，以為「少了

30 元」就要用減的，所以 $120 - 30 = 90$ ，誤將汽車模型的錢算成 90 元。

4. 有 12% 的學生選擇④，這些學生可能不了解「4 個機器人模型比 6 輛汽車模型少了 30 元」的意思，先算出 4 個機器人模型的錢： $180 \times 4 = 720$ 之後，沒有先加 30 元，而是先除以 6， $720 \div 6 = 120$ ，最後再加上少了的 30 元，所以誤將汽車模型的錢算成 150 元。

(四) 學生表現說明

1. 本題為整數四則混合運算的題目，題目中除了乘除計算，還包含比較型加法的情境。比較型加減法是學生較容易混淆的類型之一。本題在評量學生是否能從問題情境中正確判斷機器人模型與汽車模型之間的售價關係，並能熟練運用四則運算規則解題。
2. 本題難易度為 0.39。只有不到四成的學生能理解題意並進行正確的列式計算，故仍有五成多的學生無法正確解題。本題較特別的是錯誤選項②的選答率高達 38%，高於正確選項③的選答率 35%，學生可能看到「少了 30 元」就以為要用減的，沒有仔細思考「少了 30 元」也可能是兩量比較時「不夠 30 元」，所以反而要用加的。從高分組與低分組學生的表現來看，雖然只有 37% 的高分組學生能正確回答問題，但選答率較高的錯誤選項只有選項②。而低分組學生只有 22% 選擇正確答案，另外三個錯誤選項的誘答率皆很高，顯示低分組學生對於較複雜的文字題題意並未充分掌握，因此無法正確列式及計算。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-03 能熟練整數四則混合計算。

(二) 先備的知識

1. 4-n-04 能在具體情境中，解決兩步驟問題，並學習併式的記法與計算。
2. 4-n-05 能做整數四則混合計算（兩步驟）。

(三) 延伸的知識

1. 6-n-05 能在具體情境中，解決分數的兩步驟問題，並能併式計算。
2. 6-n-08 能在具體情境中，解決小數的兩步驟問題，並能併式計算。

十二年國教課綱（學習內容）（草案，送部版）

(一) 評量重點

R-5-2 四則計算規律（II）：乘除混合計算。「乘法對加法的分配律」。將計算規律應用於簡化混合計算。熟練整數四則混合計算。

(二) 先備的知識

R-4-1 兩步驟問題併式：併式是代數學習的重要基礎。含四則混合計算的約定

(由左往右算、先乘除後加減、括號先算)。學習逐次減項計算。

(三) 延伸的知識

1. N-6-5 **解題**：整數、分數、小數的四則應用問題。二到三步驟應用解題。含使用概數協助解題。
2. R-6-1 **數的計算規律**：小學最後應認識(1)整數、小數、分數都是數，享有一樣的計算規律。(2)整數乘除計算及規律，因分數運算更容易理解。(3)逐漸體會乘法和除法的計算實為一體。併入其他教學活動。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

熟練解決整數加、減、乘、除混合計算的問題。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 一律由左至右計算

學生可能對於整數四則運算順序的規約並不了解，因此不論算式中是否同時具有加、減、乘、除或是有括號，皆由左至右逐一進行計算。

以算式 $20+4\times 5-3$ 為例，學生可能會先計算 $20+4=16$ ，接著將 $16\times 5=80$ ，再算 $80-3=77$ ，因此而得到錯誤的結果，此即學生了解其運用四則運算規約，而只知由左至右逐步計算。

2. 以為先算乘法，再算除法

學生可能只知口訣「先乘除後加減」，誤用口訣中的運算規則，以為乘法的運算順序先於除法。另外也有可能是因為括號通常先教，所以學生最熟悉，因此容易忽略其他的運算規則。

以算式 $48\div 6\times 2$ 為例，學生可能先算 $6\times 2=12$ ，再算 $48\div 12=4$ ，所以誤算答案為 4。

3. 以為先算加法，再算減法

學生可能只知口訣「先乘除後加減」，誤用口訣中的運算規則，以為加法的運算順序先於減法。

以算式 $20-3+7$ 為例，學生可以先算 $3+7=10$ ，再算 $20-10=10$ ，所以誤算答案為 10。

4. 對於併式的過程及方式不了解

當學生不了解併式的意義及算則歸約產生的情況時，學生容易不理解「括號先算」、「先算乘或除，後算加或減」等算則的意義。

例如： $7\times 18=126$ ， $7\times 12=84$ ， $126+84=210$ ，如果先算 $18+12=30$ ，再算 $7\times 30=210$ ，可以簡化計算，因此可以併式為 $7\times (18+12)$ 。當學生不了解這個併式過程及括號先算的意義時，就無法理解各種四則運算的算則，

而只是一味的從左至右逐項運算。

5. **對多步驟問題的題意理解有困難**：五年級整數混合運算學習的是三步驟應用問題，學生對複雜的應用問題情境不能充分理解題意，因此容易錯誤列式。

(三) 核心概念的教學重點

學生在學習四則運算的算則時，應該利用生活化的情境，讓學生理解為了簡化複雜的列式及運算過程，因此逐漸形成運算規則的共識：

1. 由左至右計算

學生在學習整數四則運算之前即具有「先算左邊，再算右邊」的舊經驗。唯先前的學習情境是較為單純的單步驟或二步驟解題，在進入較為複雜的情境（多步驟）之後，人們首先形成「由左至右計算」的規約。

以 $23-30+15$ 和 $3\times 15\div 5$ 為例，因為式子中的運算符號為「+」、「-」與「 \times 」、「 \div 」與學生先前的計算經驗雷同，因此學生多數能執行由左至右計算，部分學生可能會先進行「 $30+15$ 」以及「 $15\div 5$ 」的運算，雖然答案相同，唯在進行教學時，應適當檢視計算方式與題意是否相符。

2. 括號部分先計算

在一個算式中如果出現括號，則表示「必須先處理的部分」，教師應從情境布題，再輔以提問，讓學生產生「某部分必須先處理」的體會，亦即出現「使用括號的需求感」。例如：「包子店新開幕，每個包子一律 5 元，媽媽用 500 元買了 6 個肉包，8 個菜包，應該找回多少元？」學生依據題意，可分別列出下列算式： $5\times 6=(\quad)$ （買 6 個肉包的錢），及 $5\times 8=(\quad)$ （買 8 個菜包的錢）。

這時老師可輔以提問：「媽媽買包子一共花多少錢？」多數學生會將兩者相加，以「 $5\times 5+6\times 5$ 」合併算式，教師再提問：「媽媽付了 500 元，應該找回多少錢？」，學生可能會寫成： $500-5\times 6+5\times 8=(\quad)$ 。

此時，即應請學生思考這個算式的計算是否符合題意，學生提出應該要「先算」肉包和菜包一共要多少錢，再用 500 元減去花費的總額，即是老師提問之應該找回的金額。在情境設計及教師的提問引導下產生「括號先算」的需求，因此，我們可以使用括號將上述算式寫成： $500-(5\times 5+6\times 5)$ 。

3. 先算乘或除，後算加或減

隨著運算情境的複雜，為了減少括號的使用，人們約定當算式中同時出現加、減或乘、除在一個算式中時，要先算乘除再算加減，因此在這個運算歸約的學習，亦應設計生活化的情境，協助學生理解「先算乘或除，後算加或減」歸約的產生。

以 $53-3\times 15$ 為例，在解題時，應先算「 3×15 」的部分，得到 45，再計算 $53-45=8$ 。

4. 理解題意後再列式及學習併式

教師應利用多步驟問題讓學生從理解題意後有次序的一一系列式解題，待

學生能熟練解決多步驟問題後再開始學習併式。併式教學時需同時呈現多步驟算式，再慢慢併式過渡到能以一個算式記錄問題。

例如：「小明口袋有 1 個 10 元硬幣和 6 個 5 元硬幣，請問小明共有多少元？」學生理解題意後多步驟解題算式可能為： $6 \times 5 = 30$ ， $10 + 30 = 40$ ；引導學生併式為 $10 + 6 \times 5 = (\quad)$ ，再討論因為乘或除是連加或連減的簡化記錄形式，因此運算位階高於加或減，所以約定「先算乘或除，後算加或減」的算則。

5. 波利亞解題四步驟

當三步驟以上的四則運算情境越來越複雜時，應指導學生運用波利亞 (G. Polya) 《怎樣解題》(蔡坤憲譯，2006)一書中所提出來的解題四大步驟：

- (1) **了解問題**：設法理解整個題目要求的是什麼，並正確理解題意。
「什麼是未知數？」、「什麼是已知數？」、「有什麼已知條件？」。畫圖、引入適當的符號，皆有助於瞭解問題，千萬不可在瞭解題意之前就埋頭苦算。
- (2) **擬定計畫**：逐漸形成或經過一連串的嘗試錯誤所激發的靈感，所規劃的解題路徑。
「是否知道什麼類似的題目？」、「這裡有個以前解過的問題能否運用？」、「是否使用了題目裡全部的條件？」。可運用重述問題、一般化、特殊化、類比、除去部分條件等方法，架構出解題計畫。
- (3) **執行計畫**：穩紮穩打地執行擬定好的計畫，並「檢查每一個步驟」，時時確保過程中沒有遺漏任何已知的條件及預定的計畫。
- (4) **驗算與回顧**：回顧整個求解的過程可加深對數學知識的理解及培養解題能力。
「能否檢查這個論證？」、「能否將其結果應用到其他問題上？」、「把問題裡的抽象數學元素賦予具體的詮釋。」。如此加深對問題的印象可大幅增進解題能力，但這個步驟也是最多人容易輕忽的。

(四) 本題的教學加強重點

本題為整數四則混合運算的題目，題目中包含比較型加法情境，情境中加數未知，被加數比加數少，也就是未知的加數比較多，因此在計算時比較少的要追加，因此要用加法。學生容易沒有仔細思考被加數與加數的數量關係，看到題目「4 個機器人模型比 6 輛汽車模型少了 30 元」誤以為「少了 30 元」就要用減的，因此容易判斷錯誤的關係而算錯。

教師應引導學生運用波利亞的解題四步驟，逐步澄清題意，方能正確列式及計算：

1. 了解問題

師：「從題目來看，我們知道什麼物品的價錢？」

生：「4 個機器人的價錢是 $180 \times 4 = 720$ 元。」

師：「從題目來看，我們不知道什麼物品的價錢？」

生：「我們不知道 6 輛汽車模型的價錢。」

師：「從題目來看，我們還知道什麼訊息？」

生：「4 個機器人模型的價錢比 6 輛汽車模型少了 30 元。」

2. 擬定計畫：

師：「哪一種比較便宜？便宜多少元？」

生：「4 個機器人模型比 6 輛汽車模型便宜 30 元。」

師：「我們也可以說哪一種比較貴？貴多少元？」

生：「6 輛汽車模型比 4 個機器人模型貴 30 元。」

師：「我們要如何列式算出 6 輛模型汽車的價錢？」

生：「 $720 - 30 = (\quad)$ 。」

師：「用減的嗎？720 是什麼的價錢？比較便宜的還是比較貴的？」

生：「720 是 4 個機器人模型的價錢，6 輛模型汽車的價錢比較貴，所以是
 $720 + 30 = (\quad)$ ，是 750 元。」

師：「6 輛模型汽車是 750 元，一輛多少元？」

生：「 $750 \div 6 = (\quad)$ ，一輛是 125 元。」

師：「可不可以依題意整理歸納成一個算式？」

生：「 $180 \times 4 + 30 \div 6 = (\quad)$ 。」

3. 執行計畫：

師：「觀察這個算式，哪裡要先算，符合題意嗎？」

生：「先算乘或除，所以 180×4 和 $30 \div 6$ 要先算，不符合題意，所以要加括號： $(180 \times 4 + 30) \div 6 = (\quad)$ 。」

師：「接下來要如何計算？」

生：「先算括號，括號內的 180×4 要先算，再 $+ 30$ ，所以 $180 \times 4 + 30$ 是 750，再 $\div 6$ ，算出答案是 125。」

4. 驗算與回顧：

師：「125 是什麼呢？真的是符合題意所要計算的嗎？」

生：「125 元是一輛模型汽車的價錢。 $125 \times 6 = 750$ ， $750 - 30 = 720$ ， $720 \div 4 = 180$ （元），正好是一個機器人模型的價錢，符合題意。」

第 25 題

知識向度	數與計算	認知向度	程序執行																												
對應分年細目	5-n-06 能用約分、擴分處理等值分數的換算。																														
題目	<p>一杯奶茶由紅茶和牛奶調配而成，紅茶占全部的$\frac{9}{15}$，牛奶占全部的$\frac{6}{15}$，這杯奶茶與下列哪一個選項的調配方式相同？</p> <p>① 300 毫公升的奶茶裡含有 180 毫公升的紅茶 ② 250 毫公升的奶茶裡含有 100 毫公升的紅茶 ③ 150 毫公升的奶茶裡含有 30 毫公升的牛奶 ④ 90 毫公升的奶茶裡含有 60 毫公升的牛奶</p>																														
答題表現 選項分析	<table><tr><td>選 項</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>其他</td><td>答案：1</td></tr><tr><td>選項率</td><td>0.43</td><td>0.14</td><td>0.17</td><td>0.25</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>高分組</td><td>0.71</td><td>0.07</td><td>0.06</td><td>0.16</td><td>0.00</td><td></td></tr><tr><td>低分組</td><td>0.23</td><td>0.21</td><td>0.25</td><td>0.30</td><td>0.00</td><td></td></tr></table>			選 項	1	2	3	4	其他	答案：1	選項率	0.43	0.14	0.17	0.25	0.00		高分組	0.71	0.07	0.06	0.16	0.00		低分組	0.23	0.21	0.25	0.30	0.00	
選 項	1	2	3	4	其他	答案：1																									
選項率	0.43	0.14	0.17	0.25	0.00																										
高分組	0.71	0.07	0.06	0.16	0.00																										
低分組	0.23	0.21	0.25	0.30	0.00																										

一、 試題分析

(一) 數據解析

本題鑑別度為 0.48，通過率為 0.43，試題難易度 0.47。

(二) 評量目標說明

本題是利用等值分數的概念來解決生活問題，要求學生能用擴分或約分的方式，計算等值分數，評量學生應用等值分數概念的解題能力。

(三) 選項表現說明

- 有 43% 的學生選擇正確選項①，顯示只有約四成的學生掌握能靈活運用等值分數概念解決生活問題的能力。學生能理解「300 毫公升的奶茶裡含有 180 毫公升的紅茶」，即紅茶佔全部奶茶的比例為 $\frac{180}{300} = \frac{9}{15}$ 。
- 有 25% 的學生選擇④，這些學生可能不理解題意中紅茶、牛奶佔奶茶的比例關係，故學生將 90 毫公升的奶茶和 60 毫公升的牛奶相加，得到 150 毫公升，以為這是奶茶的總量，所以牛奶佔全部奶茶的比例為 $\frac{60}{150} = \frac{6}{15}$ ，故認為④正確。

3. 有 17% 的學生選擇③，這些學生可能不了解題意中紅茶與牛奶佔的比例與容量的關係，而誤將兩個比例的分子相減得到 3，因此誤以為答案和 $\frac{3}{15}$ 有關，故選擇③。
4. 有 14% 的學生選擇②，這些學生可能將 250 毫公升的奶茶減去 100 毫公升的紅茶，得到 150 毫公升的牛奶，因此得到紅茶佔全部奶茶的比例為 $\frac{6}{15}$ ，牛奶佔全部奶茶的比例為 $\frac{9}{15}$ 。沒有注意到紅茶和牛奶的比例和題目相反而選擇②。

(四) 學生表現說明

1. 本題的命題設計主要希望了解學生，對於「部份佔全體」關係的分數基本概念是否理解，並能運用擴分、約分的方式找出等值分數，解決本題跟比例有關的生活情境問題。學生需先能理解紅茶佔全部奶茶的比例為 $\frac{9}{15}$ ，以及牛奶佔全部奶茶的比例為 $\frac{6}{15}$ ，題意所代表的奶茶配方為：由紅茶 9 份及牛奶 6 份調配的奶茶，故分母（總量）為 15 份。了解此比例之分數概念後，學生就能以擴分或約分的方式去找到等值的相同奶茶比例。
2. 本題難易度為 0.47。有約四成的學生能靈活運用等值分數的概念來解決生活問題，但仍有五成多的學生無法正確解題。從高分組與低分組學生的表現來看，71% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 23% 回答正確，另外三個錯誤選項的誘答率皆很高，顯示低分組學生對於等值分數的概念並未充分掌握住，所以很容易混淆分子（部份）和分母（整體）的關係。

二、教材地位分析

97 課綱（分年細目）

(一) 評量重點

5-n-06 能用約分、擴分處理等值分數的換算。

(二) 先備的知識

4-n-09 能認識等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。

(三) 延伸的知識

1. 5-n-07 能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。
2. 6-n-03 能認識兩數互質的意義，並將分數約成最簡分數。

十二年國教課綱（學習內容）（草案，送部版）

(一) 評量重點

N-5-4 異分母分數：用約分、擴分處理等值分數並做比較。用通分做異分母分

數的加減。養成利用約分化簡分數計算習慣。

(二) 先備的知識

N-4-6 等值分數：由操作活動中理解等值分數的意義。簡單異分母分數的比較、加、減的意義。簡單分數與小數的互換。

(三) 延伸的知識

N-6-3 最大公因數與最小公倍數：質因數分解法與短除法。兩數互質。運用到分數的約分與通分。

三、教學建議

(一) 評量核心概念

以約分處理等值（真、假、帶）分數的換算。

(二) 學生常見的錯誤類型／迷思概念

1. 找等值分數的方法錯誤：找等值分數時「給定分數的分母」和「指定分數的分母」的數值非整數倍的關係。

例如： $\frac{21}{35} = \frac{(\quad)}{15}$ 。35 和 15 非整數倍關係，學生可能先將 $\frac{21}{35}$ 化為最簡分數 $\frac{3}{5}$ 後，再進行擴分的換算，在換算過程中容易產生錯誤。學生可能是認為 $21 \div 7 = 3$ ，所以寫了 7；也可能是因為計算 $\frac{3}{5} = \frac{(\quad)}{15}$ 時，將 3×3 看成 $3 + 3$ ，所以寫了 6；也可能是因為約成最簡分數卻忽略了題目中分母的條件，而寫了 3。

2. 不了解等值分數的意義而換算錯誤：分子或分母正好相同時就以為是等值分數。用擴分的方式通分時，只乘分母或分子。例如： $\frac{4}{18}$ 和 $\frac{3}{12}$ 比大小，錯誤擴分成 $\frac{4}{18} = \frac{4}{36}$ ， $\frac{3}{12} = \frac{3}{36}$ 。

3. 將擴分和分數乘法混淆，約分和分數除法混淆：擴分和分數乘法混淆。例如錯誤計算 $\frac{3 \times 3}{6 \times 3} = \frac{3}{6} \times 3 = \frac{9}{6}$ ；約分和分數除法混淆（六年級學了分數除法以後），例如：錯誤計算 $\frac{3 \div 3}{6 \div 3} = \frac{3}{6} \div 3 = \frac{1}{6}$ 。

(三) 核心概念的教學重點

學生學習用擴分或約分方法找等值分數時，先要理解等值分數的概念，才能熟練運用擴分或約分的方法快速找出等值分數，否則容易產生上面的錯誤類型和迷思概念。

1. 先複習等值分數的概念：例如 $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$ 。透過具體物或圖形表徵（必須比例精確，可善用電腦繪製或教具輔助教學）解說等值分數的概念，學生

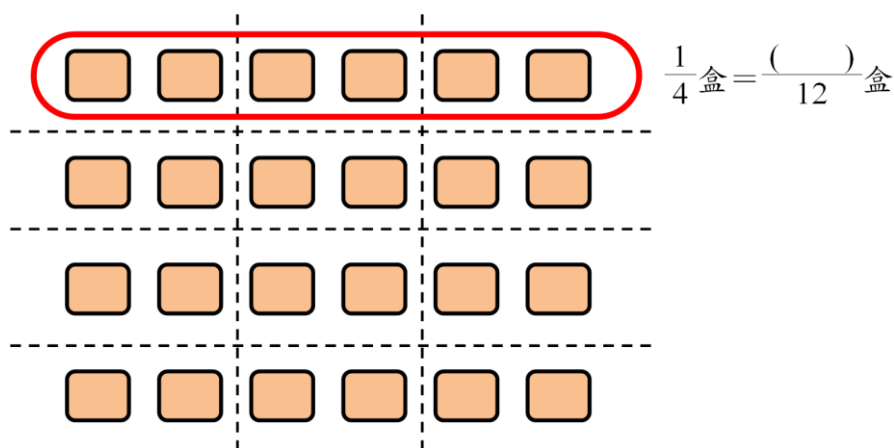
也可以實際操作疊合比對，看看等分後的每一等份是否相等。學生可透過具體物及圖像表徵觀察發現：互為等值分數的分數有不同的「等分割及再合成其數份」的數量，但其值或量是一樣大的，以鞏固等值分數的概念。

2. **經驗擴分的意義**：教師要在具體情境之下，導引出擴分的經歷。

(1) **將單位分數轉換為指定分母的等值分數**：以問題「24 顆巧克力裝成一盒， $\frac{1}{4}$ 盒和 $\frac{(\quad)}{12}$ 盒一樣多？」為例，學生可能的解題策略如下：

甲、**以內容物的觀點進行解題活動**：學生透過觀察發現 $\frac{1}{4}$ 盒有 6 顆巧克力，再思考十二分之多少盒是 6 顆巧克力。因题目的指定分母是 12，表示一盒巧克力要平分成 12 等分，而一份是 2 顆，故能理解並判斷 $\frac{3}{12}$ 盒是 6 顆巧克力。

乙、**由等分割份數的觀點進行解題活動**：如【圖 25-1】，因 12 恰好是 4 的整數倍，因此可以將 $\frac{1}{4}$ 所表示的整體切割的 4 份，每一份再平分成 3 小份，使得小份的總數量是 $4 \times 3 = 12$ (小份)，而一份代表 $1 \times 3 = 3$ (小份)，故得到 $\frac{3}{12}$ 的解答。



【圖 25-1】

由 $\frac{1}{4}$ 的分子、分母同乘以 3 得到等值分數 $\frac{3}{12}$ ，就是擴分。教師可以多布類似情境題，讓學生多累積擴分的經驗。而分數的分母，可從整數倍到不是整數倍的練習。引導學生在找等值分數的歷程中，觀察歸納出離散量情境擴分或約分的計算法則。

(2) **離散量情境，帶分數轉換成指定分母的分數的活動**：以「12 顆乒乓球裝成一盒， $1\frac{1}{3}$ 盒和 6 分之多少盒一樣多？」為例，學生可能的解題策略：

甲、將帶分數看成整數與分數兩部分的合成結果，先處理分數部分，把單位分數或真分數表示成指定分母的等值分數後，再加上原先的整數部

分，以獲得新的等值帶分數。本題的做法是把 $1\frac{1}{3}$ 看成是 1 和 $\frac{1}{3}$ 的合成結果，再把 $\frac{1}{3}$ 轉換成等值分數 $\frac{2}{6}$ ，新的等值分數就是 $1\frac{2}{6}$ 。

乙、學生也可能將帶分數先化為假分數，再比照將真分數轉換為指定分母等值分數的方式，進行解題活動。如本題把 $1\frac{1}{3}$ 轉換成 $\frac{4}{3}$ ，將 $\frac{4}{3}$ 轉換成等值分數 $\frac{8}{6}$ ， $\frac{8}{6}$ 再轉換為帶分數 $1\frac{2}{6}$ 。

- (3) **連續量情境，將分數轉換為指定分母的等值分數：**因為分母是整數倍的例題與前面的離散量情境大同小異，故此部分舉例分母為不是整數倍的問題。

以「 $\frac{2}{8}$ 個披薩和 12 分之多少個披薩一樣大？」為例，學生可從操作圓形分數片中經驗 $\frac{2}{8}$ 的圓和分成 12 等分的圓疊在一起，發現 $\frac{2}{8}$ 和 $\frac{3}{12}$ 一樣大，記作 $\frac{2}{8} = \frac{3}{12}$ ； $\frac{2}{8}$ 個圓和 $\frac{1}{4}$ 個圓一樣大，記作 $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ 。

另外學生也可以找等值分數的舊經驗，先把 $\frac{2}{8}$ 的分子、分母同除以 2 得到等值分數 $\frac{1}{4}$ ，再把分子、分母同乘以 3 得到等值分數 $\frac{3}{12}$ 。

- (4) **介紹擴分與約分的名詞並連結相關概念：**
- (5) 擴分是指把分數的分母和分子同乘一個大於 1 的數，而得到一個分割份數變多的等值分數的方法。
- (6) 約分是指把分數的分母和分子同除以大於 1 的公因數，而得到一個分割份數變少的等值分數的方法。
- (7) 從概念理解進入程序性知識，學生多練習以熟練擴分方法。

(四) 本題教學的加強重點

1. 理解及應用分數的部份與全體關係

本題的重要概念是學生要理解飲料配方中紅茶與牛奶所佔的比例，以分數形式表達出的部份與全體關係，學生才能運用擴分或約分的方式找到相同比例的等值分數以進行解題。

在教學時教師可進行實際飲料的調配活動並輔以圖像表徵，以協助學生理解分數在此表示的「 $\frac{\text{部份量}}{\text{全體量}}$ 」的意涵。如：奶茶中紅茶的比例為 $\frac{9}{15}$ ，約分成最簡分數為 $\frac{3}{5}$ ，代表這杯奶茶是由 3 份紅茶，加上 2 份牛奶調配而成。所以若紅茶變成 2 倍為 6 份時，牛奶則變成 2 倍為 4 份，奶茶總量則為 $6+4=10$ （份）；若紅茶變為 3 倍 9 份時，牛奶則變為 3 倍 6 份，奶茶總量

則為 $9+6=15$ ；……，依此類推，故得到紅茶佔奶茶總量之等值分數如下：

$$\frac{9 \div 3}{15 \div 3} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20} = \frac{15}{25} = \frac{18}{30} = \cdots \cdots = \frac{180}{300}。$$

2. 應用兩個部份量及全體量，三量之間任兩量間的關係進行解題

本題也可以讓學生思考理解飲料配方中紅茶、牛奶與奶茶任兩量之間所佔的固定比例，以整數形式表達出部份與全體關係，如：紅茶與牛奶為 3 份和 2 份，則 180 毫公升的紅茶，需加入 120 毫公升的牛奶，共調配成 300 毫公升的奶茶（共 5 份）。

選項②奶茶為 250 毫公升，每一份為 50 毫公升，故紅茶為 150 毫公升，牛奶為 100 毫公升。

這種兩個部份量及全體量的三量之間，可以引導學生觀察兩個部份量之間的關係，也可以觀察任一部份量與全體量之的關係。這樣的觀察與解題應用，可作為六年級比與比值學習的前置經驗。

陸、 其他教學建議

一、 學生整體表現

依【表 6-1】中，本次測驗全體學生的平均通過率是 57%，從各知識向度的學生表現來看，**數與計算**略高於平均，**代數**、**幾何**略低於平均。各認知項度的學生表現，**數與計算**、**量與實測**在**程序執行**有較佳表現；**代數**與**幾何**則是在**概念理解**有較佳表現。

【表 6-1 試題數據-雙向細目表】

五	概念理解			程序執行			解題思考			小計	
	題號	分組平均通過率		題號	分組平均通過率		題號	分組平均通過率			
數與計算	3、18、 21、22、 23	全	0.55	2、4、 19、20、 25	全	0.65	17、24	全	0.54	全	0.58
		高	0.83		高	0.87		高	0.74	高	0.83
		低	0.31		低	0.44		低	0.36	低	0.36
量與實測	15	全	0.53	12、13	全	0.67	14、16	全	0.48	全	0.57
		高	0.84		高	0.92		高	0.71	高	0.82
		低	0.25		低	0.39		低	0.28	低	0.32
代數	5、7	全	0.60	6	全	0.43	--	全	--	全	0.54
		高	0.86		高	0.79		高	--	高	0.83
		低	0.35		低	0.15		低	--	低	0.28
幾何	1、10	全	0.67	8、11	全	0.56	9	全	0.34	全	0.56
		高	0.84		高	0.77		高	0.61	高	0.76
		低	0.52		低	0.37		低	0.16	低	0.39
小計		全	0.58		全	0.61		全	0.48	全	0.57
		高	0.84		高	0.85		高	0.70	高	0.82
		低	0.35		低	0.39		低	0.29	低	0.35

註：全：全體平均通過率、高：高分組平均通過率、低：低分組平均通過率。

二、 整體教學建議

1. 數與計算

【表 7-2 數與計算試題數據】

題號	鑑別度	通過率	高分組答對率	低分組答對率
02	0.40	0.69	0.90	0.49
03	0.49	0.29	0.59	0.10
04	0.36	0.77	0.94	0.58
17	0.44	0.73	0.93	0.50
18	0.58	0.68	0.95	0.37
19	0.55	0.64	0.91	0.37
20	0.36	0.73	0.91	0.55
21	0.61	0.62	0.92	0.32
22	0.54	0.62	0.89	0.35
23	0.58	0.41	0.75	0.18
24	0.33	0.35	0.55	0.22
25	0.48	0.43	0.71	0.23

(1) 分數的計算

第 18 題 (p.92) 是利用通分比較異分母分數的大小。從高分組與低分組學生的表現來看，95% 的高分組學生能正確回答問題，而低分組學生只有 37% 回答正確，有 63% 的低分組學生選擇其他的選項。本題設計分數 $\frac{4}{8}$ ，其值正好為 $\frac{1}{2}$ ，但低分組學生中竟有 43% 的學生選擇錯誤選項①和②，而選項①和②的值皆大於 $\frac{1}{2}$ ，不符合題目要求。可見低分組學生對分數所代表的數值大小沒有具體概念，因此容易和整數概念混淆，所以誤以為「分數的比較大小」就是「分子和分母分別作數字的比較大小」。

第 23 題(p.122)是理解分數乘法的意義，並能判斷乘積的大小。整體而言，大部份學生未能理解分數乘以分數的意義，因此不能從乘數的大小判斷積的變化。學生也有可能正確計算得到積，但又無法正確判斷積的大小是否介於 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{4}{6}$ 之間。

第 2 題 (p.13) 是理解除數為整數的分數除法的意義以解決生活問題。整體而言，大多數學生能理解並應用除數為整數的分數除法意義。然仍有 40% 的低分組學生對於帶分數除以整數的意義及計算技巧未能充分掌握。

(2) 等值分數的換算

第 25 題 (p.135) 是利用等值分數的概念以解決生活問題。整體而言，大部份學生對於靈活應用等值分數概念解決生活問題的能力有待加強。本題用整數呈現不同的部份量與全體量，學生對於連結擴分及約分找等值分數的概念不清楚，也可能對於判斷兩個部份量之間的關係或兩個部份量與整體量之間的關係容易混淆。

(3) 認識多位小數

第 22 題 (p.116) 是認識多位小數的基本概念題。整體而言，學生雖大多數對於多位小數具基本概念，但卻對小數位值代表的數值大小無法連結分數概念具體掌握，所以容易被整數概念影響而產生混淆。

(4) 小數乘法（乘數是小數）與除法（整數除以整數）的直式計算

第 20 題 (p.105) 是小數乘法（乘數是小數）的直式計算題。整體而言，大部分學生都能掌握整數乘以二位小數的直式計算。有超過四成的低分組學生可能對小數乘法直式記錄的意義不了解，因此容易混淆而選擇錯誤的直式紀錄方式。

第 4 題 (p.20) 是整數除以整數，可以整除且商為三位小數的應用問題。整體而言，大部分學生都能掌握整數乘以二位小數的直式計算。低分組學生則可能在紀錄整數除以整數的直式計算時，對於商為小數的小數點位值標示有困難，表示學生對直式算則的意義並不了解。

(5) 分數與小數在數線上的標記

第 21 題 (p.110) 是認識分數與小數在數線上的位置。對整體學生而言，有 29% 的學生選擇錯誤選項②，有可能表示學生較熟悉分段數為 10 的情況而因此混淆，當分段數非為 10 時，則學生不容易

理解小數在數線上的對應位置。

(6) 整數的四則計算

在第 17 題 (p.87) 的學生表現中，高分組答對率為 94%，低分組亦有 50% 的答對率，顯示學生在進行解題時，多數都能充分讀題及理解題意的設定並正確求解。第 24 題 (p.129) 的學生表現，高分組答對率為 55%，低分組也只有 22% 的學生能正確求答案，從此題的表現，顯示五年級的學生，可能對於在題目的語句中如果出現「少了 30 元」此種語句敘述，學生常常認為在運算中應該是以減法運算，而不是配合整個情境的敘述再決定使用加法或是減法運算。

(7) 理解因數與倍數的概念

本次測驗中的第 3 題 (p.17)、第 19 題 (p.100) 為因數與倍數的相關題型。就學生的表現而言，第 3 題判斷最大公因數與最小公倍數時，高分組的學生答對率為 59%，低分組的學生答對率為 10%。第 19 題判別因數倍數時，高分組的學生答對率為 91%，低分組的學生答對率為 37%。顯示高分組學生，對因數與倍數的意義是了解的。但對於何謂最大公因數？何謂最小公倍數？不論是高分組或低分組的學生都出現了混淆不清的情形。

(8) 總結

此次「數與計算」部分的檢測結果，我們發現整數計算部分學生的表現平均通過率為 54% (第 17、24 題，其通過率分別為 73%、35%) 是略低於數與計算主題的平均通過率 58%。從第 24 題的學生表現可知多數學生在四則運算上還需要加強概念和熟練運算規約。建議教師在進行這部分的教學時，應將四則運算的基本約定逐一設計題目，以引發學生的需求感，而非僅只以「念口訣」的方式進行教學。在因數、倍數的平均通過率為 74% (第 3、19 題，其通過率分別為 83%、64%) 來看，雖然高於該主題的平均通過率 58%，但是多數低分組的學生在概念上卻是混淆不清，建議教師在進行因數與倍數的單元教學時，可以安排具體物的操作，藉由分配與加倍的變化，充分體會因數與倍數的意義，嗣後再以數來進行記錄，轉成形式化的運思。

以上分數與小數的檢測結果來看，小數題目的平均通過率為 78% (第 4、20、22 等三題其通過率分別為 83%、73%、62%) 高於數與計算的平均通過率 58%，而分數題目的平均通過率 60% (第 2、18、23、25 等四題其通過率分別為 86%、68%、41%、43%) 以及

分數與小數在數線上的位置（第 21 題通過率為 62%）的題目其通過率均則是低於平均通過率的。由此可見，學生在小數的表現大幅優於在分數上的表現。小數方面的表現還不錯，但以第 10 題單位化聚的表現較差，建議教師在教學上多幫助學生理解小數的位值概念，多做小數的化聚練習。建議教師在分數的教學上，先建立分數的基本概念，分數的四則運算的教學先以概念理解進入，待學生大多能掌握概念之後，才進入純計算的法則練習。另從第 21 題可看見數線上的分數與小數的標記表現非常不理想，建議教師幫助學生理解分數和小數標記在數線上的意義為何。

另外解決現有較為複雜的問題，學生都需要有穩固的先備基礎，因此，在教與學的過程中，老師須熟悉教材地位，引導學生對於所學習的單元建構學習概念地圖，知道所學過的基礎、聚焦於當前所學，並能初步了解後續的學習發展，幫助學生建構學習的整體觀，當比單獨熟練現有學習單元來的重要。

2. 量與實測

【表 7-3 量與實測試題數據】

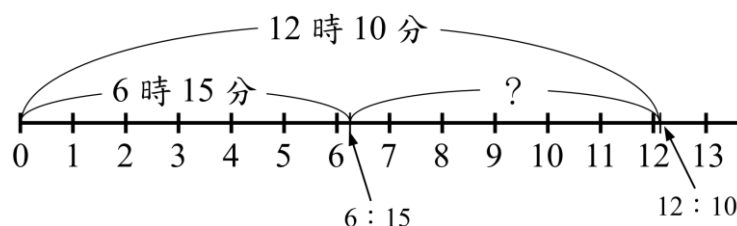
題號	鑑別度	通過率	高分組答對率	低分組答對率
12	0.54	0.68	0.94	0.40
13	0.51	0.65	0.90	0.39
14	0.50	0.74	0.97	0.47
15	0.59	0.53	0.84	0.25
16	0.35	0.23	0.45	0.10

（1）時間的乘法及加法計算問題

把時間單位換算當成是十進位及六十進位：時、分的單位換算為六十進位並非我們平常所熟悉的十進位或是百進位，因此運算時常容易和十進位和百進位產生混淆而導致化聚錯誤。第 13 題(p.63) 低分組 22%的學生誤以為時間換算是百進位，高分組則有 6%。低分組 18%的學生誤以為時間換算是十進位，高分組則只有 1%的學生誤以為時間換算是 10 倍作為換算基準。建議教學時，建立學生時、分換算為 60 進位的計算，並循序漸進加大時間數量的範圍。由低階單位「分」聚成高階單位「時」是六十進位，將幾分÷60 就是幾時幾分。而由高階單位「時」化成低階單位「分」也是在整數時和幾

時幾分的範圍，將「幾時」 $\times 60$ 就是「幾分」或是「幾時」 $\times 60 +$ 幾分。

時刻和時間（量）的計算問題：第 13 題（p.63）低分組有 21% 的學生，高分組 3% 的學生誤以為時間量 6 小時 12 分鐘是時刻下午 6 時 12 分。建議教學時，多加運用時間線段讓學生清楚時刻與時間量的關係。學童可以在時間直線上標示某時刻，並能瞭解該時刻和表示從 9 時開始到時刻所經過的時間量的不同，可讓學童將問題利用算式填充題呈現，再配合時間數線說明。學童就時間數線的說明，可能有兩類，一類是「位置經過位移到新位置」的**向量觀點**，即某時刻加（減）時間量是某某時刻（對應下方 B、C 型，也可配合點算），或二時刻相差一個時間量（對應下方 A 型）的說法；一類是「時間量加減」的計算觀點，即將時刻換成從 0 時間量，對兩個時間量作加法運算（對應下方 B 型）或減法運算（對應下方 A、C 型）的說法。



再記成算式填充題：

A 型：12 時 10 分 $-$ 6 時 15 分 = () 時 () 分。

B 型：6 時 15 分 + () 時 () 分 = 12 時 10 分。

C 型：12 時 10 分 $-$ () 時 () 分 = 6 時 15 分。

(2) 重量單位的計算（公噸和公斤）

不理解進行重量複名數的計算：第 12 題（p.56）題目已提示 1 公噸 = 1000 公斤，但低分組 60% 學生仍不會運用此條件進行重量單位化聚。建議可繪製重量定位板，先讓學生精熟重量定位板的使用，再讓學生精熟重量複名數的化聚，最後可將重量定位板進行「小數」的應用。學生可利用定位板進行學習操作，一步一步聽從老師的指導，讓學生了解小數位值的變化關係。

(3) 面積單位的計算（「公畝」、「公頃」、「平方公里」）

學生對面積和周長分不清楚：第 16 題（p.80）低分組有 90% 的學生不知道 1 公頃的面積大小相當於邊長 100 公尺，周長 400 公尺的正方形土地；1 公畝的面積大小相當於邊長 10 公尺，周長 40 公尺

的正方形土地；1 平方公尺的面積大小相當於邊長 1 公尺的正方形土地。除此之外，「1 公頃＝10000 平方公尺」的概念，低分組有 33 % 的學生卻把面積 10000 平方公尺看作是邊長 10000 公尺，甚至有 38% 的學生把邊長 10000 公尺乘 4 倍當成是正確答案。

平方公尺、公畝、公頃、平方公里的轉換能力不足：在進行「平方公尺→公畝→公頃→平方公里」單位間的換算時，每一階段都是 100 倍的關係。可以正方形面積為例：

邊長 10 公尺的正方形面積＝100 平方公尺

＝1 公畝；

邊長 100 公尺的正方形面積＝10000 平方公尺

＝100 公畝

＝1 公頃；

邊長 1000 公尺的正方形面積＝1000000 平方公尺

＝10000 公畝

＝100 公頃

＝1 平方公里。

當正方形邊長增加 10 倍時，面積增加的倍數是「邊長增加倍數的平方」倍。同時建議老師要先讓孩子釐清長度的單位是「公分、公尺、公里」，面積的單位是「平方公分、平方公尺、公畝、公頃、平方公里」，面積單位化聚時不會是 $\times 1000$ 倍或 $\div 1000$ ，因為是長度的平方倍，只會是 \times (或 \div) 100 ($= 10 \times 10$) ; \times (或 \div) 10000 ($= 100 \times 100$)。老師也可使用面積定位板來進行教學。

(4) 體積單位的計算（「立方公尺」、「立方公分」）

學生易混淆不同維度之間的表徵，例如：知道「公尺」轉換為「公分」就是數字要乘上 100，所以認為「平方公尺」或「立方公尺」轉換為「平方公分」或「立方公分」數字也都只要乘上 100，混淆了長度、面積與體積的意義。以及單位間化聚的概念不清。例如：

第 15 題 (p.75) 低分組只有 25% 回答正確，低分組中有 44% 的學生誤認為邊長 1 公尺的正方體需要 100 個 1 立方公分組成。低分組有 17% 的學生認為 1 平方公尺＝10000 平方公分，而誤以為 10000 立方公分所堆疊出來的體積就是 1 立方公尺。有 13% 的學生對於「立方公分」及「立方公尺」間的關係並未充分掌握住，認為將 1 公升與 1 立方公尺混淆，誤認為 1 公升＝1000 立方公分，也就是 1 立方公尺需要 1000 個 1 立方公分組成。由此可知，低分組對於

單位化聚（1 立方公尺=1000000 立方公分）的概念不清，把 1 立方公尺與 1 立方公分的換算當成是 1 平方公尺與 10000 個 1 平方公分或 1 公升與 1 立方公尺混淆，當成是 1000 個 1 立方公分。因此對於低分組學生，老師可在長度（周長）與面積、面積與體積關係上多加澄清，教學時多加辨別。

維度	表徵與屬性	對應單位
一維	直線／長度 例如：正方形周長公式：邊長×邊數	公分、公尺、……
二維	平面／面積 例如：正方形面積公式：邊長×邊長	平方公分、平方公尺、……
三維	立體／體積 例如：正方體體積公式：邊長×邊長×邊長	立方公分、立方公尺、……

(5) 容量與體積的關係與計算（算出沉入水中物體的體積等於物體所排開的水量。）

在第 14 題（p.69）中，低分組有 22% 的學生只知道要求體積，所以認定假山的體積與整個水族箱原先水位的高度相關，就直接將長方體的

長×寬×水位高，三數相乘，把長方體水族箱內原有水的體積當成假山的體積。有 17% 的學生認為假山的體積與整個水族箱水位上升後的高度相關，一樣只是把長方體的長、寬、高相乘，把放入假山後水的總體積當作是假山的體積。學生須具備「物體的體積等於上升水的體積」的概念，也就是「沉入水族箱中造景假山的體積」與「水族箱的底面積×水族箱水位增加的高度」是相等的觀念，才能準確作答完成。教學時應先建立沉入水中物體的體積會與排開水量相等的概念，以及物體的內部體積就是容積，容器內若裝滿液體，則此液量就是物體的容量的基礎概念。

(6) 總結

此次「量與實測」部分的檢測結果，顯示大部分學生對於重量和時間的換算，或是簡單加減乘法的計算能力已大致具備。在面積單位換算、體積的計算和容量的改變觀念大致清楚。但最讓人意外的是「5-n-17 能認識面積單位「公畝」、「公頃」、「平方公里」及其關係，並做相關計算。」這題的通過率只有 2 成多，高分組只

有 45% 的學生答對，低分組更只有 10% 的學生答對。但本題為解題思考題，牽涉到面積 1 公頃的正方形土地，邊長是 10000 公尺，但題目卻是要求出周長，同時測驗學生周長與面積兩種重要概念，造成眾多學生無法分析正確解題。

建議老師於平時上課時，要重視培養量感，讓學生學習量的實測與估測，並能與別人溝通觀察的結果。量的學習在高年級著重在常用單位的約定與常用單位的換算，鼓勵教師配合生活情境認識某種量的單位，並能運用此單位，作量的比較、加、減、乘、除。學生在描述測量結果時，老師宜先引導學生能用大小單位的複名數來描述測量結果。然後再學習使用單位換算的約定，來進行換算。例： $1200 \text{ 公尺} = 1 \text{ 公里 } 200 \text{ 公尺} = 1.2 \text{ 公里}$ 。量與實測的學習，學生必須具備充分的量感，並且清楚知道長度、面積、體積三種不同的量，才能正確進行各種量的單位換算及加減乘除的計算。

3. 幾 何

【表 7-4 幾何試題數據】

題號	鑑別度	通過率	高分組答對率	低分組答對率
01	0.24	0.88	0.98	0.74
08	0.37	0.81	0.98	0.60
09	0.45	0.34	0.61	0.16
10	0.39	0.47	0.69	0.30
11	0.42	0.31	0.55	0.13

(1) 三角形的性質問題

第 8 題 (p.38) 為理解三角形三內角和為 180 度的問題。測驗結果通過率為 81%，高分組通過率為 98%，低分組通過率為 60%。與去年答題情形相較，可以發現今年度的學生作答情形優於去年，明顯可以看出學生對於三角形三內角和為 180 度的問題，已能充分掌握，題目中故意將三角形對折，學生仍然能夠判斷出角 B 與角 C 相同，進而推論此三角形為等腰直角三角形，並且應用三角形三內角和為 180 度的性質解決問題。對於低分組的學生而言，其他三個選項各有 1~2 成的選答情形，顯示學生雖然知道三角形三內角和為 180 度，但是對於題目出現變化後，無法將依此一性質應用於解決出現變化的問題，仍受自己的直觀經驗或先備經驗影響，因此也無法解題。

第 10 題 (p.46) 為理解三角形任意兩邊和大於第三邊的問題。測驗結果通過率為 47%，高分組通過率為 69%，低分組通過率為 30%。顯見有三成的高分組學生以及七成的低分組學生，對於三角形任意兩邊和大於第三邊的性質，仍然不是相當的清楚。對高分組或是低分組的學生而言，大部分對於「任意」以及「大於」的意義，並無法充分掌握。因此導致在解題時，無法精確的判斷應該選取哪一個長度的竹籤方能符合題意。

(2) 線對稱問題

第 1 題 (p.10) 能認識線對稱與簡單平面圖型的線對稱性質，測驗結果通過率為 88%，高分組通過率為 98%，低分組通過率為 74%。就整體學生而言，大部分已能了解線對稱的定義，並能判斷出正確的對稱軸，尤其高分組學生絕大部分皆能正確作答，低分組的學生也超過七成五能正確作答，顯示出學生對於線對稱的定義已能充分理解。不過在低分組中有 26% 的學生未能正確找出圖形的對稱軸，其背後所代表的學習意義值得思考。

(3) 面積問題

第 9 題 (p.41) 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。測驗結果通過率為 34%，高分組通過率為 61%，低分組通過率為 16%。就整體學生而言，三角形面積的計算或者梯形面積的計算，仍需加強，尤其至少有 31% 的學生將三角形的鄰邊誤認為高，顯示對於引導學生找出三角形的高是教學上需加強的重點。就低分組學生而言，合計有 50% 的比例選擇第三、第四選項，明顯無法掌握三角形面積計算的正確計算方式。

(4) 表面積與體積問題

第 11 題 (p.50) 為理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積，唯以學生學習中常見的長方體展開圖進行命題，讓學生求得長方體的體積。測驗結果通過率為 31%，高分組通過率為 55%，低分組通過率為 13%，不論是高分組的學生或者低分組的學生，對於從展開圖中判別長方體的長、寬、高產生錯誤，尤其有將近 45% 的學生未能仔細判斷出正確的長、寬、高，直接將題目中所給定的 3 個長度進行計算，因此造成作答錯誤的情形。

(5) 總結

此次「幾何」部分的檢測結果，顯示大部分學生的觀念並非完

全清楚，很容易受到自己先前的學習經驗及答題時的直觀經驗影響，尤其在面對 2D 的平面圖形來想像 3D 的體積等屬於立體幾何的部分，觀念並不穩固。另外，對於三角形的面積、長方體的體積，學生似乎已習慣使用公式的口訣背誦進行解題，未能細究如何判定和者為長、寬、高，因此，建議老師於平時上課時，除了必須讓學生有充分的時間、確實地操作幾何教具，接續應使用幾何圖形讓學生將操作的學習經驗與知覺建立心像留在記憶中，最後才引導學生運用符號表徵的方式進行抽象思考，依實際操作→圖像表徵→符號表徵的學習模式，逐步建立清楚的幾何概念。

4. 代 數

【表 7-5 代數試題數據】

題號	鑑別度	通過率	高分組答對率	低分組答對率
05	0.48	0.71	0.94	0.46
06	0.64	0.43	0.79	0.15
07	0.53	0.49	0.77	0.24

(1) 對四則運算性質的熟練及運用

在代數方面，本次檢測共 3 題，第 5 題(p.24)、第 6 題(p.28)、第 7 題(p.33)，平均答對率為 54%。這 3 題主要在評量學生是否熟練整數四則混合運算的各種性質，如：括號先算、先乘除後加減、乘法對加減法的分配律、先乘後除與先除後乘結果相同、連除兩數相當於除此兩數之積……等，並能靈活運用各種算則以簡化計算。整體而言，高分組的平均答率高達 84%，低分組的平均答對率卻只有 28%，尤其第 6 題低分組的答對率甚至只有 15%。顯示低分組的學生在四則運算性質的學習上並未完全理解。除了因為四則運算規則是較為抽象的原因之外，學生對於四則運算規則的概念也是混淆的，因而產生錯誤的迷思，造成計算上的錯誤。

(2) 利用情境脈絡的不同引導學生列式

在教學方面，建議教師在引導學生學習利用四則運算性質解題時，應從具體生活情境引導學生逐步理解題意後依序列式，學生熟練之後再探討不同的列式在情境脈絡上的解釋有何不同，計算後所產生的結果是否相同？引導學生理解並建立四則運算規則的概念。

例如：「一打鉛筆有 12 枝，小明有黃色鉛筆 8 打，小華有紅色鉛筆 2 打，兩人共有幾枝鉛筆？」引導學生從小明的鉛筆數量是 $12 \times 8 = (\quad)$ ，小華的鉛筆數量是 $12 \times 2 = (\quad)$ ，兩人共有 $(8+2)$ 鉛筆，因此可以併式計算為： $12 \times (8+2) = (\quad)$ ，自然可以引導出約定「括號先算」的算則。

其次，教師在設計數學情境的數字時，也可設計讓學生發現：運用算則可以讓計算更簡單，如：「有一個長 24 公分、寬 8 公分、高 5 公分長方體，它的體積是多少？」，長方體體積的計算方式是「長 \times 寬 \times 高」，所以列式應為 $24 \times 8 \times 5 = (\quad)$ ，教師可引導學生發現：若是運用乘法結合律 $24 \times (8 \times 5) = (\quad)$ ，先算 $8 \times 5 = 40$ ，則原式變成 24×40 ，則會非常容易進行計算，以引起學生學習及應用算則的強烈動機。

(3) 總結

此次「代數」部分的檢測結果，顯示對四則運算規則的產生，學生在學習及理解上有相當的困難度。教師在代數這個部份的教學時務必設計出讓學生在解題上的需求感，然後從中引導學生觀察發現不同列式所代表的意義。在教學過程中幫助程度較低的學生理解抽象的算則，不但可以簡化計算、降低錯誤，更可以避免產生更多的迷思概念。

105 學年度學力檢測測驗題本 數學五年級

作答注意事項：

各位同學你們好！

這是一份數學的試題，測驗時間為 40 分鐘。每一題請選出一個最合適的答案，並用 2B 鉛筆在答案卡畫記，不可超出格線外，如果需要修改答案，請使用橡皮擦擦乾淨，再重新畫記。

畫記說明：


正確方式→ ① ② ③ ●

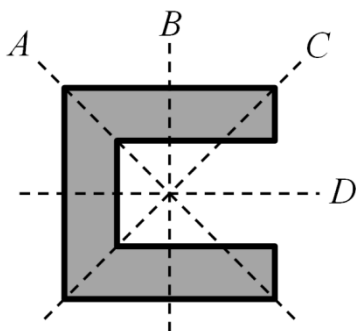
其他事項：

★ 每一題都要回答。

★ 如有錯誤，請立即向老師反應。

學 校	
班 級	
姓 名	
座 號	

1. 小明畫出一個線對稱圖形「」(如下圖)，哪一條虛線是它的對稱軸？



- ① 虛線 A
② 虛線 B
③ 虛線 C
④ 虛線 D
2. 冰箱裡有 $1\frac{8}{12}$ 桶豆花，平分給 4 位學生，每位可分得幾桶豆花？
- ① $1\frac{2}{12}$ 桶
② $\frac{5}{12}$ 桶
③ $\frac{5}{3}$ 桶
④ $\frac{2}{3}$ 桶
3. 下列敘述何者正確？
- ① 2 和 4 的最小公倍數是 8
② 2 和 4 的最小公因數是 2
③ 4 和 8 的最大公倍數是 32
④ 4 和 8 的最大公因數是 4

4. 雜貨店將 12 公斤的麵粉平均分裝成 125 包，每包麵粉重多少公斤？

- ① 0.0096 公斤
- ② 0.096 公斤
- ③ 0.96 公斤
- ④ 9.6 公斤

5. 「一包糖果有 50 顆，老師買了 4 包，想平分給 2 個班級的學生，每班可以分到幾顆糖果？」下列哪一個算式不能算出正確答案？

- ① $50 \times 4 \div 2$
- ② $50 \div 2 \times 4$
- ③ $50 \div (4 \times 2)$
- ④ $50 \times (4 \div 2)$

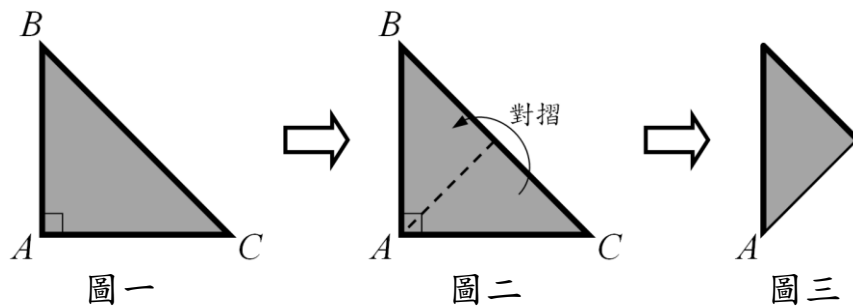
6. 下列哪一個算式能夠算出「 $24 + 12 \div 3 \times 4$ 」的答案？

- ① $36 \div 3 \times 4$
- ② $24 + 12 \div 12$
- ③ $24 + 4 \times 4$
- ④ $(24 + 12) \div (3 \times 4)$

7. 「學校開闢三塊長方形菜園，第一塊菜園的長為 3 公尺、寬為 2 公尺；第二塊菜園的長為 3 公尺、寬為 4 公尺；第三塊菜園的長為 3 公尺、寬為 5 公尺。這三塊菜園的面積共是多少平方公尺？」下列哪一個算式能算出正確答案？

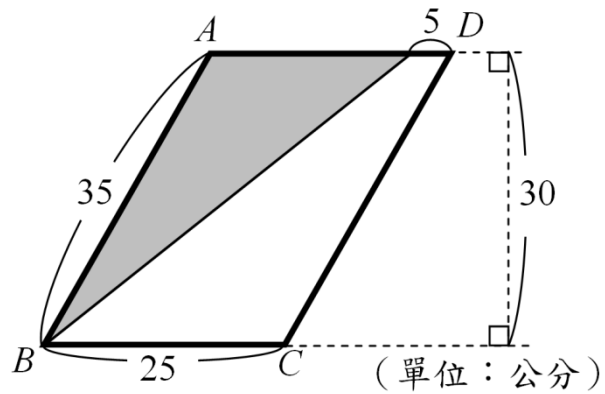
- ① $(3+3+3) \times (2+4+5)$
- ② $3 \times 2 + 4 + 5$
- ③ $3 \times (2 \times 4 \times 5)$
- ④ $3 \times (2+4+5)$

8. 三角形 ABC 中角 A 是直角（如圖一），小明將三角形對摺（如圖二），發現角 B 和角 C 完全疊合（如圖三），角 B 是幾度？



- ① 30 度
- ② 45 度
- ③ 60 度
- ④ 90 度

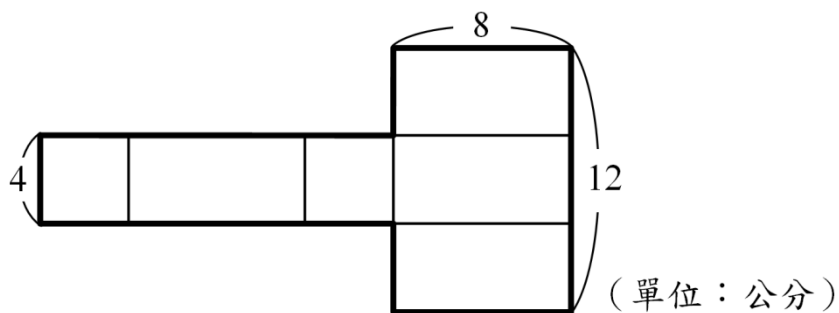
9. 一個平行四邊形 $ABCD$ 中，灰色三角形（如下圖）的面積是多少平方公分？



- ① 300 平方公分
② 350 平方公分
③ 600 平方公分
④ 700 平方公分
10. 妹妹有兩根竹籤，長度分別是 13 公分及 5 公分，妹妹想要拼出一個三角形，還需要下列哪一根長度的竹籤？

- ① 6 公分
② 8 公分
③ 10 公分
④ 19 公分

11. 下圖為一個長方體的展開圖，這個長方體的體積是多少立方公分？



- ① 128 立方公分
- ② 160 立方公分
- ③ 256 立方公分
- ④ 384 立方公分

12. 一隻大象重 5.7 公噸、一隻小象重 3 公噸 5 公斤，大象和小象的體重相差多少？（1 公噸=1000 公斤）

- ① 2 公噸 695 公斤
- ② 2 公噸 2 公斤
- ③ 2.65 公噸
- ④ 2.2 公噸

13. 齊柏林導演拍攝的電影「看見台灣」片長 1 小時 33 分鐘，若電影院從上午 9 時 30 分開始，連續播放這部電影 4 遍，播完時是下午幾時幾分？

- ① 下午 3 時 2 分
- ② 下午 3 時 42 分
- ③ 下午 5 時 2 分
- ④ 下午 6 時 12 分

14. 在一個寬為 50 公分、長為 100 公分的長方體水族箱中，將一個完全沉入水中的造景假山取出後，水族箱水位高度從 40 公分變成 38 公分，這座造景假山的體積是多少立方公分？
- ① 10000 立方公分
 - ② 190000 立方公分
 - ③ 199962 立方公分
 - ④ 200000 立方公分
15. 一個邊長 1 公尺的正方體，它的體積和多少個 1 立方公分的小正方體一樣大？（1 公尺＝100 公分）
- ① 100 個
 - ② 1000 個
 - ③ 10000 個
 - ④ 1000000 個
16. 有一塊正方形的土地面積是 1 公頃，這塊正方形土地的周長是多少？（1 公頃＝10000 平方公尺）
- ① 100 公尺
 - ② 400 公尺
 - ③ 10000 公尺
 - ④ 40000 公尺

17. 「有 2 位家長請全班喝飲料，飲料每杯 45 元；因為訂了 30 杯，所以老闆每杯便宜 5 元。這 2 位家長每人平均要付多少元？」下列哪一個算式能算出正確答案？

- ① $(45 - 5) \times 30 \div 2$
- ② $(45 - 5 \times 30) \div 2$
- ③ $(45 \times 30 - 5) \div 2$
- ④ $45 \times 30 - 5 \div 2$

18. 下列哪一個分數小於 $\frac{4}{8}$ ？

- ① $\frac{2}{3}$
- ② $\frac{5}{7}$
- ③ $\frac{3}{9}$
- ④ $\frac{16}{32}$

19. 五年級學生全部有 234 人，要進行分組，每組人數相同且剛好全部分完，五年級的學生不可能是幾個人一組？

- ① 13 人
- ② 26 人
- ③ 38 人
- ④ 78 人

20. 下列哪一個直式紀錄是正確的？

①

$$\begin{array}{r} 31.55 \\ \times \quad 500 \\ \hline 157.75 \end{array}$$

②

$$\begin{array}{r} 31.55 \\ \times \quad 500 \\ \hline 1577500 \end{array}$$

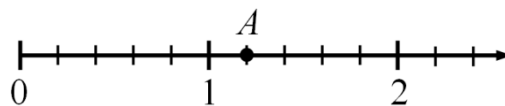
③

$$\begin{array}{r} 500 \\ \times 31.55 \\ \hline 2500 \\ 2500 \\ 500 \\ 1500 \\ \hline 295.00 \end{array}$$

④

$$\begin{array}{r} 500 \\ \times 31.55 \\ \hline 2500 \\ 2500 \\ 500 \\ 1500 \\ \hline 15775.00 \end{array}$$

21. 下面有一條數線，A 點的位置代表多少？



① 0.6

② 1.1

③ $1\frac{1}{6}$

④ $1\frac{1}{5}$

22. 下列哪一個選項是正確的？

① $0.90098 > 0.9098$

② 「15.0032」讀作「十五點零三二」

③ 「0.23695」中的 9 是千分位

④ $\frac{1}{16}$ 用小數表示是 0.0625

23. 下列哪一個算式的計算結果在 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{4}{6}$ 之間？

① $\frac{4}{6} \times \frac{6}{4}$

② $\frac{4}{6} \times \frac{4}{6}$

③ $\frac{1}{3} \times \frac{4}{6}$

④ $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$

24. 一個機器人模型賣 180 元，買 4 個機器人模型比買 6 輛汽車模型的價錢少了 30 元，一輛汽車模型賣多少元？

① 90 元

② 115 元

③ 125 元

④ 150 元

25. 一杯奶茶由紅茶和牛奶調配而成，紅茶占全部的 $\frac{9}{15}$ ，牛奶占全部的 $\frac{6}{15}$ ，這杯奶茶與下列哪一個選項的調配方式相同？

① 300 毫公升的奶茶裡含有 180 毫公升的紅茶

② 250 毫公升的奶茶裡含有 100 毫公升的紅茶

③ 150 毫公升的奶茶裡含有 30 毫公升的牛奶

④ 90 毫公升的奶茶裡含有 60 毫公升的牛奶

